Intégrales elliptiques de Legendre : formulaire

1 Intégrales elliptiques

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) \mathrm{d}x$$

où R est une fraction rationnelle et P un polynôme de degré 3 ou 4, à racines simples.

2 Formes canoniques de Legendre

2.1 Intégrale elliptique incomplète de première espèce

$$F(c,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-c^2t^2}}$$

$\varphi =$ amplitude ; $c =$ module $(0 \leq c \leq 1)$; $\theta = \sin^{-1} c =$ angle du module $(0 \leq \theta \leq 90^o)$;
$b = \sqrt{1-c^2} = \cos\theta =$ complément du module.

2.2 Intégrale elliptique incomplète de seconde espèce

$$E(c,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-c^2\sin^2\psi}\,\mathrm{d}\psi = \int_0^{\sin\varphi} \sqrt{\frac{1-c^2t^2}{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

2.3 Intégrale elliptique incomplète de troisième espèce

$$\Pi(n,c,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\psi}{(1+n\sin^2\psi)\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}}$$

$n =$ paramètre

2.4 Intégrales elliptiques complètes

$$F^1(c) = F\left(c, \frac{\pi}{2}\right) \qquad E^1(c) = E\left(c, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F^1(c)E^1(b) + F^1(b)E^1(c) - F^1(c)F^1(b) = \frac{\pi}{2}$$

3 Fonctions elliptiques de Jacobi (pour un module c fixé)

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}} = \int_0^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\,\sqrt{1-c^2t^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi = \operatorname{am} u$$

$$\operatorname{sn} u = \sin(\operatorname{am} u) = x$$

$$\operatorname{cn} u = \cos(\operatorname{am} u) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\operatorname{dn} u = \sqrt{1-c^2\sin^2(\operatorname{am} u)} = \sqrt{1-c^2x^2}$$