

Textes qui serviront de support à l'exposé

1. Henri de Morin, *Les appareils d'intégration. Intégrateurs simples et composés. Planimètres ; intégromètres, intégraphes et courbes intégrales, analyse harmonique et analyseurs*, Paris : Gauthier-Villars, 1913

L'origine de tous ces appareils est relativement récente et ne remonte pas au-delà du commencement du siècle dernier. [...]

L'idée première des intégraphes est due à Coriolis, qui en a exposé le principe, en 1836, dans le *Journal de Liouville*.

2. Maurice d'Ocagne, *Cours de géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, tome 2, Paris : Gauthier-Villars, 1918

Un intégraphe est un appareil qui permet le tracé continu des courbes intégrales fournies soit par de simples quadratures, soit par l'intégration d'équations différentielles de types divers. [...]

Le premier en date de tous les intégraphes connus est celui qui a été inventé dès 1836 par Coriolis (depuis lors Directeur des Études à l'École Polytechnique), et dont la description se trouve dans le Tome I du *Journal de Mathématiques* de Liouville.

3. Louis-Frédéric Jacob, *Le calcul mécanique. Appareils arithmétiques et algébriques. Intégrateurs*, Paris : Doin, 1911

L'histoire des intégrateurs composés, c'est-à-dire des appareils destinés à l'intégration des équations différentielles, est plus courte encore que celle des intégrateurs simples. [...]

Quoi qu'il en soit, c'est en somme Coriolis qui a inauguré le premier intégrateur composé, en même temps que le premier intégraphe ; mais son système était peu précis et n'a reçu aucune application.

Il semble que ce soit W. Thomson qui ait le premier abordé cette question dans une série de communications faites à la Société royale de Londres en 1876.

4. Guido Ascoli, *Vedute sintetiche sugli strumenti integratori*, *Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano*, 18 (1947), 36-54 (trad. D. Tournès)

Une fois que tous les planimètres ont été identifiés comme des transformateurs géométriques munis d'une roulette, on s'aperçoit que leur fonctionnement se justifie au moyen de la transformation d'une intégrale de surface en intégrale de ligne, suivant la formule de Green. [...]

S'il est possible jusqu'à un certain point d'insérer les planimètres dans un schéma unique, la chose apparaît beaucoup plus difficile pour l'autre grande classe d'instruments d'intégration : les *intégraphes*, destinés à tracer les courbes intégrales d'une fonction donnée ou, plus généralement d'une équation différentielle donnée. Et cela se comprend, vu la grande variété des tâches que ces appareils doivent accomplir.

5. Gottfried Wilhelm Leibniz, *Supplementum geometriæ dimensoriæ seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum : similiterque multiplex constructio linæ ex data tangentium conditione*, *Acta eruditorum*, septembre 1693 (trad. M. Parmentier)

Il existe néanmoins d'autres façons de construire les courbes, comportant l'adjonction d'un élément physique. [...] Pourvu que le mode de construction soit exact, il entre dans la géométrie théorique ; pourvu qu'il soit commode et utile, il a droit de cité dans la pratique. [...] Mais il existe un nouveau type de mouvement que je pense avoir été le premier à employer pour réaliser des constructions géométriques, je

vais dire en quelle occasion ; car il semble, mieux que tous les autres, relever de la pure géométrie et se rapprocher du tracé des courbes au moyen de fils issus des ombilics ou foyers. L'unique condition qu'il comporte est en effet que le point effectuant le tracé de la courbe dans le plan soit attaché à l'extrémité d'un fil situé dans le même plan (ou dans un plan équivalent) et se déplace en même temps que se déplace l'autre extrémité du fil, mais par simple traction, sans impulsion transversale, ce qu'on ne saurait espérer réaliser avec un fil à cause de sa flexibilité ; il faut encore que le point soit tiré dans la direction même du fil tendu qui l'entraîne, c'est-à-dire dans la direction du fil qui le tire, ce qui se produit spontanément pourvu qu'il ne rencontre aucun obstacle sur son chemin. Toutefois un fil matériel n'ayant jamais la flexibilité absolue que suppose la géométrie, il pourrait aisément entraîner de côté le poinçon, autrement dit le point effectuant le tracé (et qui est libre dans le plan), si bien que le mouvement du point ne serait plus une simple traction ; mais à cet obstacle matériel on oppose aisément un expédient matériel en faisant en sorte que le point effectuant le tracé appuie légèrement contre le plan auquel il appartient ou en soit solidaire ; cet expédient peut consister en un poids superposé ou lié à lui, de telle sorte que de lui-même le point pèse sur le plan horizontal où il doit se déplacer et tracer la courbe. De cette manière, si l'inertie de ce poids entravant le mouvement du point l'emporte toujours sur le petit reste de raideur subsistant dans le fil, le fil sera d'autant mieux tendu et son mouvement d'autant plus régulier ; ainsi il agira sur le point réalisant le tracé par simple traction et non par impulsion, seule condition imposée en l'occurrence à celui-ci. Il s'ensuit par ailleurs qu'un tel mouvement est remarquablement bien adapté à la géométrie transcendante, puisqu'il met en jeu directement les tangentes soit les directions des courbes, donc des grandeurs élémentaires en nombre infini mais de longueur inassignable, autrement dit des infiniment petits.

C'est à Paris que me fut autrefois offerte l'occasion d'imaginer une telle construction. Le célèbre médecin parisien Claude Perrault [...] me soumit, comme à beaucoup d'autres, le problème suivant, dont la solution, reconnaissait-il très honnêtement, ne s'était pas encore présentée à lui : trouver la courbe BB que décrit dans un plan horizontal, au point B ou en un point équivalent, un poids fixé à l'extrémité B d'un fil ou d'une chaînette AB lorsque, guidant l'autre extrémité A du fil AB le long d'une droite fixe AA, on tire de ce fait le poids dans le plan horizontal que j'ai dit (ou un autre plan équivalent), où se situent déjà la droite AA au cours de son mouvement ainsi que le fil AB. Il usait pour mieux se faire comprendre d'une montre B enfermée dans un écrin d'argent qu'il tirait sur une table en déplaçant le long d'une règle AA l'extrémité A d'une chaînette fixée à l'écrin. De cette façon, le point le plus bas de l'écrin (situé au centre de sa partie inférieure) décrivait sur la table la courbe BB. En examinant attentivement cette courbe (j'étais justement plongé dans l'étude des tangentes), je remarquai aussitôt, ce qui est la clé du problème, que le fil est constamment tangent à la courbe [...].

D'emblée il m'a été facile de comprendre qu'une fois aperçue la relation entre le mouvement et les tangentes on peut construire par le même procédé quantité d'autres courbes qu'il serait plus difficile de ramener à une quadrature. Car à supposer même que AA ne soit pas une droite mais une courbe, le fil n'en serait pas moins tangent à BB. Bien plus, même si la longueur du fil AB augmentait ou diminuait pendant qu'on le tire, il n'en resterait pas moins tangent. C'est pourquoi [...] divers artifices nous permettraient de régler le mouvement du fil afin qu'il se déplace en se raccourcissant selon une loi donnée. Ce procédé nous permet même de tracer une infinité de courbes solutions d'un même problème, par exemple celle passant par un point donné. [...] En méditant sur l'extrême généralité de ce type de mouvements et sur les applications incalculables qu'ils offrent, j'ai noirci autrefois quantité de brouillons, j'ai même songé à leurs modalités pratiques, eu égard notamment aux ressources merveilleuses que j'y distinguais dans la conversion des tangentes et plus encore dans les quadratures.

6. Leonhard Euler, De constructione æquationum ope motus tractorii aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus, *Commentarii academiae scientiarum Peropolitanae*, 8 (1736), 1741, 66-85 (trad. D. Tournès)

On décrit des lignes courbes par un mouvement tractionnel lorsqu'un fil de longueur donnée ayant un poids attaché à une extrémité, on tire son autre extrémité le long d'une ligne donnée, soit droite, soit courbe ; et cette ligne courbe que le poids décrit dans son mouvement est appelée tractoire. [...] Il faut noter la propriété de cette courbe que le fil est constamment situé sur une tangente de la courbe tractoire [...].

J'ai observé que la construction géométrique de la tractoire AM dépend toujours de la résolution de l'équation $ds + s^2 dz = Z dz$, où l'on désigne par Z une fonction quelconque de z . C'est pourquoi, puisque cette équation est très difficile à construire et assurément plus générale que l'équation $ds + s^2 dz = z^m dz$ que le comte Riccati avait proposée autrefois, sa construction par l'emploi du mouvement tractionnel mérite l'attention. Étant donné par ailleurs que ce procédé est tout à fait simple et facile, cela vaudra la peine de ramener au mouvement tractionnel la construction de cette équation si ardue. [...]

Comme la méthode que j'ai employée pour réduire la construction de l'équation au tracé d'une tractoire aura une grande utilité dans la résolution de problèmes généraux qui se rapportent à la méthode inverse des tangentes, j'ajouterai quelques problèmes de ce type et je montrerai comment les résoudre.

7. Vincenzo Riccati, *De usu motus tractorii in constructione æquationum differentialium*, Bononiæ : Ex Typographia Lælii a Vulpe, 1752 (trad. D. Tournès)

Euler a donné la construction d'une équation analogue, en fait un peu plus abordable, en utilisant le mouvement tractionnel. Étant donné que je n'ai pas vu le travail d'Euler sur ce sujet et que j'ai seulement lu la construction sans aucune démonstration dans un opuscule de Clairaut, je ne connais ni l'analyse ni la méthode par lesquelles il est arrivé à cette découverte étonnante. Je me suis occupé d'évaluer attentivement la construction ; j'ai cherché avidement à retrouver la démonstration comme il est d'usage pour les résultats nouveaux ; je m'en suis rendu maître en peu de temps et sans trop de peine. Et je me suis servi de la méthode directe pour rechercher quelles équations se construisent à l'aide d'une tractoire de base curviligne et de tangente constante. [...]

J'ai appliqué alors la méthode à des formules analogues et je suis ainsi parvenu avec bonheur à une construction au moyen d'une espèce de tractoire décrite de telle manière que le point traceur se trouve toujours sur une courbe donnée se déplaçant d'un mouvement parallèle. Peu après, j'ai compris que ce type de construction pouvait convenir à tous les trinômes sans exception. Cette courbe dont le point traceur ne se sépare jamais, je l'ai appelée directrice de la tractoire. [...]

Bien que j'aie jugé par ces découvertes que des limites devaient être fixées à mes recherches, il m'est cependant venu à l'esprit d'essayer si de nouvelles formules seraient construites par des tractoires dotées d'une base curviligne et d'une tangente variable donnée par les coordonnées de la base. [...] Ces constructions se font avec des tractoires dotées d'une directrice dont le paramètre dépend des coordonnées de la base qui servent à repérer les données. [...]

Peu après, en examinant plus scrupuleusement mon analyse, il m'est apparu une technique facile et non sans élégance par laquelle les équations différentielles sont amenées de deux façons à une construction par des tractoires à base rectiligne : si tu combines convenablement ces deux façons, tu achèves la construction quelle que soit la base employée pour la tractoire. Puisqu'il en est ainsi, notre méthode est largement développée ici afin qu'on voie que rien ne lui manque et qu'on la juge portée au plus haut degré de perfection. [...]

Giovanni Poleni, homme des plus savants et des plus laborieux, a découvert un instrument élégant et très sûr pour dessiner sans difficulté la tractoire commune, celle qui, cela va de soi, est pourvue d'une base rectiligne et d'une tangente constante. En l'imitant, il me semble que des instruments sûrs pour dessiner des tractoires ayant une base courbe peuvent être conçus par ceux qui sont versés dans ce genre d'étude. Je n'ignore pas que chaque base nécessite son instrument particulier. Pourtant, malgré tout, on doit faire grand cas de ce type de construction parce qu'on s'acquitte de ce qui est demandé grâce à des instruments sûrs faits d'assemblages de règles et d'équerres rigides. [...]

En dernier lieu, il faut dire quelque chose sur la façon de dessiner ces tractoires dont les directrices curvilignes doivent être déplacées d'un mouvement parallèle. Giovanni Poleni, après avoir livré un instrument adapté pour dessiner les tractoires, a présenté un autre instrument très exact, composé de règles et d'équerres rigides, pour dessiner la courbe logarithmique. La logarithmique appartient au genre des tractoires : en effet, c'est une tractoire de base et de directrice rectilignes. C'est pourquoi il ne me semble pas difficile que le même artifice puisse être adapté, avec peu de modifications, au dessin de tractoires ayant une base et une directrice curvilignes. On comprendra mieux tout ceci si l'on consulte attentivement les lettres de Poleni à Hermann. [...]

Puisque les géomètres disposent rarement d'instruments tout à fait adaptés pour tracer les courbes, ils se réfugient dans la méthode de construction des courbes par points. [...] À ce genre de construction appartient celle qui utilise des tractoires dont les directrices sont munies d'un paramètre variable.

8. Gustave-Gaspard Coriolis, Sur un moyen de tracer des courbes données par des équations différentielles, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1 (1836), 5-9

Si l'on conçoit qu'un fil tendu s'enroule sur un cylindre, et que le frottement y soit assez fort pour empêcher ce fil de glisser le long de la surface contre laquelle il s'est enroulé, la courbe formée par le fil sur la surface du cylindre, développée ensuite sur un plan, jouira de la propriété que la direction de sa tangente sera toujours celle de la partie du fil tendue en ligne droite avant qu'elle s'enroule.

Si donc on peut donner au fil, dans cette partie, une direction qui résulte de l'équation différentielle d'une courbe, celle-ci se trouvera tracée sur le cylindre en prenant pour abscisses les arcs comptés sur la base du cylindre.

9. James Thomson, An integrating machine having a new kinematic principle, *Proceedings of the Royal Society*, 27 (1876), 262-265 (trad. D. Tournès)

Mon frère m'a fait remarquer qu'une opération complémentaire, importante pour certaines applications, pouvait être effectuée en faisant en sorte que l'appareil fournisse un enregistrement continu de la croissance de l'intégrale par l'introduction de mécanismes additionnels permettant de tracer continûment une courbe telle que, pour chacun de ses points, l'abscisse représente la valeur de x , et l'ordonnée l'intégrale obtenue depuis $x = 0$ jusqu'à cette valeur de x .

10. William Thomson, Mechanical integration of linear differential equations of the second order with variable coefficients, *Proceedings of the Royal Society*, 24 (1876), 269-271 (trad. D. Tournès)

Toute équation différentielle linéaire du second ordre peut, comme on le sait, se ramener à la forme $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{P} \frac{du}{dx} \right) = u$ (1), où P est une fonction donnée de x . [...]

J'ai fait de nombreuses tentatives pour concevoir un intégrateur mécanique qui donnerait les solutions par approximations successives. Cela est clairement réalisé maintenant que nous disposons de l'instrument pour calculer $\int \phi(x) \psi(x) dx$, fondé sur l'intégrateur disque-sphère-cylindre de mon frère et décrit dans une précédente communication à la Royal Society; en effet, on prouve facilement que si $u_2 = \int_0^x P \left(C - \int_0^x u_1 dx \right) dx$, $u_3 = \int_0^x P \left(C - \int_0^x u_2 dx \right) dx$, etc., où u_1 est une certaine fonction de x servant à démarrer, par exemple $u_1 = x$, alors u_2, u_3 , etc. sont des approximations successives convergeant vers celle des solutions de (1) qui s'annule pour $x = 0$.

À présent, utilisons l'intégrateur de mon frère pour trouver $C - \int_0^x u_1 dx$, et laissons son résultat, tel quel, alimenter continûment un second appareil, qui trouvera l'intégrale du produit de ce résultat et de $P dx$. La seconde machine fournira continûment la valeur de u_2 . Re commençons le même processus avec u_2 à la place de u_1 , puis avec u_3 , et ainsi de suite. [...] Si u_{i+1} ne diffère pas sensiblement de u_i , chacune de ces fonctions sera sensiblement une solution.

Parvenu à ce point, j'étais satisfait, pensant que j'avais réalisé ce que j'avais espéré pendant de nombreuses années. Mais une surprise agréable survint alors. Contraignons la fonction qui entre dans le double appareil à s'identifier à celle qui en sort. Cela peut être réalisé en établissant une connexion qui force le mouvement du centre de la sphère du premier intégrateur du double appareil à être le même que celui de la surface du cylindre du second intégrateur. Le mouvement de chacun sera alors nécessairement une solution de (1). Je parvins ainsi à une conclusion des plus inattendues, et il me sembla vraiment remarquable que l'équation différentielle générale du second ordre à coefficients variables puisse être résolue par une machine, rigoureusement, continûment et par un procédé unique.

11. Vannevar Bush, The differential analyser. A new machine for solving differential equations, *Journal of The Franklin Institute*, 212 (1931), 447-488 (trad. D. Tournès)

La technologie a énormément évolué depuis l'époque où Sir William Thomson suggéra pour la première fois, il y a plus de cinquante ans, que les intégrateurs conçus par son frère pouvaient être connectés entre eux et contraints par là à produire des solutions d'équations différentielles. L'idée pouvait difficilement être mise en pratique, pour la simple raison qu'un intégrateur, qui est simplement une transmission à vitesse variable, ne pouvait pas encore être construit de sorte qu'il soit à la fois précis et capable de supporter une charge suffisante pour mouvoir de nombreuses pièces mécaniques.

Le présent appareil reprend la même idée de base de l'interconnexion d'unités d'intégration [...].

La machine ainsi construite est destinée à la solution d'équations différentielles de tout ordre jusqu'au sixième [...]. La fréquence d'apparition des problèmes mettant en jeu deux ou trois équations simultanées du second ordre rend cette limite convenable, même s'il serait facile d'aller au-delà. Il est possible, lorsque les courbes ont été tracées et qu'un diagramme donnant les échelles et les connexions a été élaboré, de préparer la machine pour un problème donné en quelques heures. Le temps nécessaire à l'obtention des solutions varie avec la complexité du problème et la précision souhaitée; dans des cas représentatifs, il est de l'ordre de dix minutes pour chaque solution correspondant à un ensemble de conditions initiales. Bien entendu, il faut de l'expérience pour utiliser l'appareil efficacement. C'est d'ailleurs l'un des aspects les plus séduisants de la machine; une fois cette expérience acquise, on accède à une perception tout à fait nouvelle de la nature innée d'une équation différentielle.