Séminaire « Analogie dans les sciences : fécondités et obstacles »

Séance du 27 novembre 2003 : « Analogie et solutions graphiques »

Dominique Tournès

IUFM de la Réunion, allée des Aigues Marines, Bellepierre, 97487 Saint-Denis cedex, et REHSEIS (UMR 7596), CNRS et université Paris 7-Denis Diderot, Centre Javelot, 2 place Jussieu, 75251 Paris cedex 05.

Courrier électronique : tournes@univ-reunion.fr.

Résumé de l'intervention

Dans tout problème de calcul numérique, il y a des nombres qui sont donnés au départ, et des équations qui lient ces données à d'autres nombres inconnus : les résultats que l'on cherche. Ce schéma recouvre des situations très variées, depuis le simple calcul du produit de deux nombres jusqu'à des calculs astronomiques pouvant mobiliser plusieurs personnes pendant plusieurs années. Le calcul numérique direct, à la main et aux tables de logarithmes, est souvent long et pénible. Aussi, on a depuis longtemps imaginé des moyens détournés pour obtenir les résultats d'un calcul : l'idée générale est de représenter les nombres par des grandeurs géométriques (longueurs, aires, volumes, angles) ou physiques (mécaniques, électriques, hydrauliques, chimiques), et d'exploiter des phénomènes géométriques ou physiques dont la modélisation mathématique conduit aux mêmes équations que celles que l'on a à résoudre. Cela va se traduire souvent par la réalisation d'un appareil que l'on va placer dans une configuration initiale correspondant aux données, et que l'on va faire fonctionner de sorte à lire directement, à la fin, les grandeurs résultantes correspondant aux résultats numériques cherchés. Quand on calcule directement sur les nombres, on parle de calcul numérique « digital » ; si l'on passe par l'intermédiaire de grandeurs géométriques ou physiques, on parle de calcul « analogique ».

À la fin du 19^e et au début du 20^e siècle, il y a eu un foisonnement de recherches pour mettre au point des instruments de calcul analogique reposant sur des phénomènes physiques. Par exemple, pour résoudre les équations algébriques, on a imaginé divers systèmes de balances, mécaniques ou hydrostatiques. Dans la même veine, on peut citer quelques appareils curieux pour les équations différentielles, comme des intégrateurs hydrauliques ou chimiques. Si de tels appareils relèvent en partie de l'anecdote, plus importante pour l'histoire du calcul est l'analogie fondamentale entre systèmes mécaniques et circuits électriques. Chacun se souvient certainement de la masse suspendue à un ressort et du circuit RLC que l'on étudie en Terminale. Dans les deux cas, on obtient la même équation différentielle du second ordre à coefficients constants : l'analogie est parfaite. À partir de là, on conçoit qu'on puisse étudier le mouvement d'un système mécanique en le modélisant par un circuit électrique. Plus généralement, n'importe quelle équation différentielle du second ordre à coefficients constants, qu'elle soit d'origine abstraite ou issue d'un problème matériel, pourra elle aussi être résolue à l'aide d'un circuit électrique. Cette idée est à la base de calculateurs analogiques électroniques qui ont connu une époque florissante, surtout en Grande-Bretagne et aux États-Unis, entre 1930 et 1975. Dans ces calculateurs, les nombres sont représentés par des tensions. Une fois qu'on a mis au point des circuits élémentaires réalisant les opérations mathématiques usuelles (multiplication par une constante, intégration, dérivation, addition, etc.), il suffit ensuite de combiner ces circuits de base pour pouvoir effectuer n'importe quel calcul faisant intervenir des équations algébriques ou différentielles. Ces circuits peuvent même être inclus dans des appareils divers (radars, avions, appareils électroménagers ou audiovisuels, etc.), dans lesquels ils réalisent automatiquement, de manière interne, les calculs nécessaires. Cependant, depuis quelques années, les calculateurs analogiques ont disparu au profit de calculateurs digitaux. Tout, qu'il s'agisse d'images ou de son, est représenté par des suites de 0 et de 1. On parle de photo numérique, de son numérique, etc. On dit souvent qu'on est entré dans l'ère du « tout-numérique ».

La partie du calcul analogique qui repose sur des propriétés géométriques est ce que l'on appelle le « calcul graphique et graphomécanique ». C'est la partie du calcul analogique qui reste strictement interne aux mathématiques, en ce sens qu'elle est fondée sur l'interaction entre les deux grands types d'objets mathématiques que sont les nombres et les figures, autrement dit l'algèbre et la géométrie. Le calcul graphique est à situer dans une longue tradition de construction géométrique des problèmes qui remonte à l'Antiquité. Dans cette tradition, résoudre un problème, c'est donner une construction géométrique de sa solution à partir d'intersections de courbes que l'on trace sur le papier à l'aide de divers instruments. C'est pour cela que les mathématiques grecques et arabes se sont, dans une certaine mesure, organisées autour de la classification des courbes utilisées pour la construction des problèmes. La classification qui a prévalu quasiment jusqu'à l'époque de Descartes est celle qui a été formulée par Pappus au 4^e siècle. Pappus distingue trois types de problèmes : 1) les problèmes plans, que l'on peut construire en n'employant que des lignes droites et des cercles (autrement dit, les problèmes constructibles à la règle et au compas) ; 2) les problèmes solides, qui font intervenir en plus les sections coniques ; 3) les problèmes linéaires, qui nécessitent de recourir à d'autres courbes que les droites, cercles et coniques.

La construction des problèmes va être grandement renouvelée par Descartes, qui fait paraître en 1637 un petit livre sur la *Géométrie* en annexe de son fameux *Discours de la méthode*. Tout d'abord, Descartes précise les liens entre la géométrie et les nombres. Il établit une correspondance, une analogie, une sorte de dictionnaire, entre les opérations algébriques et les constructions géométriques. Ceci lui permet d'utiliser l'algèbre au service de la géométrie : les problèmes géométriques peuvent être ramenés à des équations algébriques, et ainsi l'algèbre apparaît comme un outil pour découvrir de nouvelles constructions géométriques qui étaient restées cachées aux Anciens. Mais le dictionnaire fonctionne aussi dans l'autre sens : en représentant les nombres par des segments de droite, on peut résoudre géométriquement des équations algébriques et, en particulier, calculer graphiquement leurs solutions. Poussant sa réflexion plus avant, Descartes propose une nouvelle classification des courbes qui va peu à peu supplanter celle de Pappus. Descartes distingue, d'une part, les courbes qui ont une équation algébrique et qu'il appelle « courbes géométriques », d'autre part, les autres courbes, regroupées dans une catégorie par défaut, celle des « courbes mécaniques ». Dans notre vocabulaire actuel, ces lignes sont respectivement appelées « algébriques » et « transcendantes ». Descartes pressent, sans pouvoir le justifier complètement, que les courbes géométriques sont aussi celles qui peuvent être tracées d'un mouvement continu unique. Il a imaginé lui-même des instruments permettant d'aller au-delà des problèmes plans, notamment un trisecteur d'angle et un mésolabe généralisé permettant d'insérer un nombre quelconque de moyennes proportionnelles entre deux longueurs (en particulier, ce dernier instrument permet l'extraction des racines n-ièmes).

Mais il n'y a pas que les courbes algébriques. C'est Leibniz qui, en 1693, a lancé l'idée qu'il fallait adjoindre un élément physique aux procédés classiques de construction pour pouvoir accéder aux courbes transcendantes, celles qui avaient été rejetées par Descartes. Cet élément physique, c'est le mouvement tractionnel, c'est-à-dire le mouvement de l'extrémité d'un fil posé sur un plan horizontal et dont on tire l'autre extrémité le long d'une courbe donnée. En 1693, Leibniz énonce à partir de là le principe d'une sorte d'intégraphe universel. Il s'agit d'un fil que l'on tire le long d'une courbe donnée et dont la longueur variable est déterminée par une autre courbe auxiliaire. En choisissant convenablement les deux courbes, on doit pouvoir résoudre n'importe quel problème inverse des tangentes. À la suite de Leibniz, on assiste ainsi à un nouvel élargissement de la géométrie. Désormais, toute courbe va pouvoir être tracée d'un mouvement continu grâce à un instrument adéquat, et donc va pouvoir servir au calcul graphique. En fait, c'est surtout au début du 20e siècle, grâce aux progrès de la technologie, que de nombreux instruments mécaniques de précision vont être construits : des systèmes articulés pour tracer les courbes algébriques, des planimètres pour calculer l'aire enclose dans un contour fermé et des intégraphes pour construire la courbe intégrale d'une courbe donnée. Au total, l'ingénieur finit par disposer d'une collection complète de mécanismes élémentaires permettant d'effectuer tous les calculs mathématiques courants, qu'ils soient algébriques ou transcendants. Grâce à cela, on a vu fleurir, à partir des années 1920-1930, un calcul analogique graphomécanique de grande envergure. En particulier, de grands analyseurs différentiels ont été construits pour résoudre les équations différentielles apparaissant avec le développement de l'électricité et du téléphone. Pendant et juste après la Seconde Guerre mondiale, ces analyseurs différentiels graphomécaniques ont été en compétition avec des analyseurs différentiels électromécaniques, puis électroniques. On sait que les appareils électroniques l'ont emporté, avant d'être balayés à leur tour par le calcul digital.

Comme on le voit, le champ d'intervention du calcul graphomécanique est vaste, ses instruments sont variés, ses racines sont anciennes. À partir de la fin du 18e siècle, ce calcul va s'organiser en une discipline autonome, avec ses spécialistes, ses traités, ses enseignements, et cette discipline va être florissante jusque dans les années 1970. À côté du calcul par le trait général, trois sous-spécialités bien identifiées se sont même créées progressivement : la statique graphique, l'intégration graphique et la nomographie. En évoquant les planimètres et des intégraphes, nous avons déjà donné plus haut un aperçu rapide de l'intégration graphique, dont le but est de traiter graphiquement les opérations du calcul intégral. Il reste à dire quelques mots sur les deux autres spécialités, la statique graphique et la nomographie, ce qui nous permettra de découvrir de nouveaux aspects de l'analogie.

Commençons par la statique graphique. On peut voir les débuts de cette discipline dans le traité de statique de Simon Stevin, paru à Leyde, en flamand, en 1586. Stevin y développe systématiquement l'idée que la résultante de deux forces peut être obtenue graphiquement par la construction d'un triangle ou d'un parallélogramme. Un siècle plus tard, Pierre Varignon étend le procédé graphique de Stevin à un nombre quelconque de forces. Il dégage les notions de polygone des forces et de polygone funiculaire, qui permettent de calculer la résultante d'un système de forces. De façon générale, on assimile, par analogie, un solide soumis à un système de forces à une chaîne fictive (d'où le nom de polygone funiculaire) en certains points de laquelle on applique les forces données. Grâce à ces notions, on peut analyser graphiquement, sans calcul, des systèmes complexes. Ces idées avaient été esquissées par Poncelet, dans le cours de mécanique industrielle qu'il professait à l'École d'application du génie et de l'artillerie, à Metz, pendant les années 1820-1830, mais c'est surtout un ancien élève de cette école, Karl Culmann, qui est considéré comme le fondateur de la statique graphique. Culmann, dans un traité de 1866, fonde véritablement une discipline nouvelle capable d'étudier graphiquement les conditions de stabilité et de résistance des constructions. Les méthodes de Culmann obtiennent tout de suite un grand succès auprès des ingénieurs, car elles permettent d'éviter de nombreux calculs fastidieux. À la fin du 19e siècle, la statique graphique connaît même des applications surprenantes au-delà de son champ d'application d'origine. Par exemple, des recherches sur la chirurgie des os ou sur le calcul des primes d'assurance sont conduites par analogie avec des structures mécaniques. Mais l'application la plus spectaculaire de la statique graphique reste la construction de la Tour Eiffel, dont la structure a été entièrement calculée graphiquement.

Passons à la nomographie, ou science des tables graphiques (qu'on appelle aussi « abaques » ou « nomogrammes »). Les premières tables graphiques sont peut-être celles qui ont été conçues par les astronomes pour la fabrication des astrolabes, des cadrans solaires et des cadrans lunaires. La navigation offre une autre piste intéressante : dès le 16e siècle, on rencontre dans ce domaine des plans de carène de navire par coupes successives, que l'on peut lire comme de véritables abaques. Quant aux premières tables graphiques spécifiquement utilisées pour le calcul, elles sont à chercher du côté des règles et cercles à calcul, ces équivalents graphiques des tables de logarithmes inventés par les Anglais au 17e siècle. Largement répandues à partir du milieu du 19e siècle, les règles à calcul ont été l'instrument de prédilection des ingénieurs jusque dans les années 1970, avant d'être rapidement supplantées par les calculatrices électroniques de poche.

Pour préciser les origines de la nomographie, il faut se pencher également sur l'histoire des représentations graphiques, en particulier sur celles des relations entre trois variables. En 1795, Louis-Ézéchiel Pouchet, un manufacturier de Rouen, représente la multiplication comme sur une carte topographique, en imaginant que la relation $z = xy$ est l'équation d'une surface : il trace sur le plan xy les hyperboles d'égale cote correspondant à des valeurs particulières de z. Sur cette table, la multiplication et la division s'exécutent instantanément par simple lecture, et les interpolations entre les valeurs marquées se font elles-mêmes à vue, sans effort particulier. Un peu plus tard, vers 1840, un ingénieur des Ponts et Chaussées, Léon-Louis Lalanne, eut l'idée de l'anamorphose géométrique : en portant sur les axes des graduations non régulières, il réussit à ramener les courbes d'égale cote employées par Pouchet à des droites. Grâce à cette simplification, les anciens abaques à trois faisceaux de courbes concourantes sont remplacés par des abaques à trois faisceaux de droites concourantes. Pour expliquer son idée et justifier le vocabulaire qu'il emploie, Lalanne fait appel à une analogie avec un phénomène optique, l'anamorphose géométrique. L'avancée suivante de la nomographie se situe en 1884, lorsque Maurice d'Ocagne, un jeune ingénieur, imagine un nouveau type d'abaque. En exploitant les acquis de la géométrie projective, notamment le principe de dualité, il transforme les abaques à droites concourantes de Lalanne en abaques à points alignés. Ces derniers sont plus faciles à lire et, surtout, prennent moins de place sur la feuille de papier. Ocagne introduit à cette occasion un nouveau vocabulaire : il appelle « nomogrammes » ces nouveaux abaques et « nomographie » la science des abaques. À la fin du 19e siècle et au 20e siècle, il y a eu d'importantes recherches pour représenter également les relations à plus de trois variables. De nos jours, la nomographie continue à être utilisée dans certains secteurs d'activité. On rencontre notamment des abaques dans des manuels techniques, des catalogues de pièces mécaniques ou des catalogues de composants électroniques. Il semble aussi que les médecins et les pharmaciens utilisent encore de tels graphiques, notamment pour calculer rapidement le dosage d'un médicament.

En conclusion, on se rend compte que l'analogie a toujours été au cœur de la science du calcul. À l'intérieur des mathématiques, elle se trouve au centre de la dialectique entre algèbre et géométrie. Les notions de nombre, de courbe, de fonction, se sont forgées à travers cette dialectique. Certes, des obstacles proviennent régulièrement des imperfections et des limitations des instruments disponibles à un moment donné. Des obstacles proviennent aussi du fait qu'il n'y a jamais identité parfaite entre les objets numériques et les objets géométriques : alors qu'on n'arrive pas à représenter certaines grandeurs géométriques par des nombres, il y a, inversement, des nombres que l'on ne parvient pas à construire géométriquement à l'aide de certains procédés et de certains instruments. Mais ces blocages provisoires sont sources de fécondité : ils entraînent un élargissement permanent du champ des nombres utilisés, l'introduction régulière de nouvelles courbes et l'invention de nouveaux instruments pour les tracer. On peut d'ailleurs penser que c'est souvent dans le calcul, à travers les problèmes pratiques que se posent les astronomes, les physiciens, les ingénieurs civils et militaires, que se préparent, sur le tas, informellement, les objets mathématiques dont les théoriciens s'empareront plus tard. Enfin, bien entendu, l'analogie n'est pas seulement interne aux mathématiques. Comme nous l'avons vu, l'intervention de phénomènes mécaniques et électriques a été, elle aussi, extrêmement féconde.

Bibliographie

ASPRAY (William), éd., *Computing before computers*, Ames : Iowa State University Press, 1990.

EVESHAM (Harold Ainsley), Origins and development of nomography, *Annals of the History of Computing*, 8 (1986), p. 324-333.

JACOB (Louis-Frédéric), *Le calcul mécanique*, Paris : Doin, 1911.

KARPLUS (Walter J.) & SOROKA (Walter W.), *Analog methods : computation and simulation*, New York : McGraw Hill, 2e éd., 1959.

MARGUIN (Jean), *Histoire des instruments et machines à calculer*, Paris : Hermann, 1994.

MAURER (Bertram), *Karl Culmann und die graphische Statik*, Berlin : Verlag für Geschichte der Naturwissenschaft und Technik, 1998.

OCAGNE (Maurice d'), *Calcul graphique et nomographie*, Paris : Doin, 1908 ; 2e éd., 1914 ; 3e éd., 1924.

RUNGE (Carl), *Graphical methods*, New York : Columbia University Press, 1912. Éd. allemande, *Graphische Methoden*. Leipzig & Berlin : Teubner, 1915 ; 2e éd. 1919.

SMALL (James S.), *The analogue alternative. The electronic analogue computer in Britain and the USA, 1930-1975*, London & New York : Routledge, 2001.

TOURNÈS (Dominique), Pour une histoire du calcul graphique, *Revue d'histoire des mathématiques*, 6 (2000), p. 127-161.

TOURNÈS (Dominique), L'intégration graphique des équations différentielles ordinaires, *Historia mathematica*, 30 (2003), p. 457-493.

WILLERS (Friedrich Adolf), *Mathematische Maschinen und Instrumente*, Berlin : Akademie-Verlag, 1951.