Séminaire REHSEIS du 15 juin 2004
Les analyseurs différentiels
Dominique Tournès

Textes qui serviront de support à l'exposé

1. William Thomson, Mechanical integration of linear differential equations of the second order with variable coefficients, *Proceedings of the Royal Society*, 24 (1876), 269-271 (trad. D. Tournès)

Toute équation différentielle linéaire du second ordre peut, comme on le sait, se ramener à la forme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = u$ (1), où P est une fonction donnée de x. [...]

J'ai fait de nombreuses tentatives pour concevoir un intégrateur mécanique qui donnerait les solutions par approximations successives. Cela est clairement réalisé maintenant que nous disposons de l'instrument pour calculer $\int \phi(x)\,\psi(x)\,\mathrm{d}x$, fondé sur l'intégrateur disque-sphère-cylindre de mon frère et décrit dans une précédente communication à la Royal Society ; en effet, on prouve facilement que si $u_2 = \int_0^x P\left(C - \int_0^x u_1\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x$, $u_3 = \int_0^x P\left(C - \int_0^x u_2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x$, etc., où u_1 est une certaine fonction de x servant à démarrer, par exemple $u_1 = x$, alors u_2, u_3, etc. sont des approximations successives convergeant vers celle des solutions de (1) qui s'annule pour $x = 0$.

À présent, utilisons l'intégrateur de mon frère pour trouver $C - \int_0^x u_1\,\mathrm{d}x$, et laissons son résultat, tel quel, alimenter continûment un second appareil, qui trouvera l'intégrale du produit de ce résultat et de $P\mathrm{d}x$. La seconde machine fournira continûment la valeur de u_2. Recommençons le même processus avec u_2 à la place de u_1, puis avec u_3, et ainsi de suite. [...] Si u_{i+1} ne diffère pas sensiblement de u_i, chacune de ces fonctions sera sensiblement une solution.

Parvenu à ce point, j'étais satisfait, pensant que j'avais réalisé ce que j'avais espéré pendant de nombreuses années. Mais une surprise agréable survint alors. Contraignons la fonction qui entre dans le double appareil à s'identifier à celle qui en sort. Cela peut être réalisé en établissant une connexion qui force le mouvement du centre de la sphère du premier intégrateur du double appareil à être le même que celui de la surface du cylindre du second intégrateur. Le mouvement de chacun sera alors nécessairement une solution de (1). Je parvins ainsi à une conclusion des plus inattendues, et il me sembla vraiment remarquable que l'équation différentielle générale du second ordre à coefficients variables puisse être résolue par une machine, rigoureusement, continûment et par un procédé unique.

2. William Thomson, Mechanical integration of the general linear differential equation of any order with variable coefficients, *Proceedings of the Royal Society*, 24 (1876), 271-275 (trad. D. Tournès)

L'équation générale de la forme

$$Q_1\frac{\mathrm{d}^i u}{\mathrm{d}x^i} + Q_2\frac{\mathrm{d}^{i-1}u}{\mathrm{d}x^{i-1}} + \cdots + Q_i\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u = 0 \qquad (5),$$

où $Q_1, Q_2, \ldots, Q_i$ sont des fonctions données de x, peut être intégrée mécaniquement par une chaîne d'intégrateurs connectés de la manière suivante :

Prenons d'abord une chaîne ouverte de i intégrateurs simples, comme décrite plus haut, et simplifions le mouvement en prenant $P_1 = P_2 = \cdots = P_i = 1$, de sorte que les vitesses de tous les disques soient égales, et que $\mathrm{d}x$ représente un mouvement angulaire infinitésimal de chacun d'eux. Nous avons donc

$$g_i = \frac{\mathrm{d}\kappa_i}{\mathrm{d}x},\ g_{i-1} = \frac{\mathrm{d}^2\kappa_i}{\mathrm{d}x^2},\ldots,\ g_1 = \frac{\mathrm{d}^i\kappa_i}{\mathrm{d}x^i} \qquad (6).$$

Établissons maintenant des connexions entre les i fourches et les i cylindres, de sorte que

$$Q_1 g_1 + Q_2 g_2 + \cdots + Q_i g_i = \kappa_i \qquad (7).$$

En remplaçant g_1, g_2, etc. par les valeurs données par (6), nous trouvons la même équation que (5), excepté que u est remplacé par κ_i. Le mécanisme, mis en mouvement de sorte qu'il satisfasse la condition (7), réalise par le mouvement de son dernier cylindre une intégration de l'équation (5).

[...] Tant qu'on ne souhaite pas construire effectivement une machine pour intégrer ainsi des équations différentielles du troisième ordre ou d'un ordre supérieur, il n'est pas nécessaire d'entrer dans les détails de la réalisation mécanique de la condition (7) ; il suffit de savoir que cette condition peut être remplie par un mécanisme pur travaillant continûment en connexion avec les disques en rotation du train d'intégrateurs.

[...] L'intégrateur peut être appliqué à l'intégration d'une équation différentielle quelconque de n'importe quel ordre.

[...] Nous avons ainsi une intégration mécanique complète du problème de la détermination des mouvement libres d'un nombre quelconque de particules en interaction mutuelle, sans les restrictions issues des diverses approximations que requiert le traitement analytique des théories de la Lune et des planètes.

3. Leonardo Torres Quevedo, Machines à calculer, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut national de France*, t. 32, n° 9, 1901.

Soit une équation où entrent, comme variables, les déplacements de certains points et, en outre, certains rapports de vitesses entre ces points pris deux à deux. Ce sera là une équation différentielle. Pour la construire, il faut avant tout représenter mécaniquement chaque dérivée par un mobile dont le déplacement soit proportionnel à la valeur de la dérivée qu'il représente.

Ce résultat peut être obtenu de plusieurs manières, par l'emploi de roulettes. La figure 18 représente une solution que j'ai prise comme exemple. Chacune des tiges *u*, *v*, *v'* peut glisser dans le sens de sa longueur ; les points *c*, *c'*, *o*, *o'* sont fixes sur la plaque π ; le système articulé *aa'bb'cc'* maintient la plaque P toujours dans la même orientation, tout en lui permettant de glisser librement sur la plaque π ; la pièce M porte une roulette R, qui tourne sur son arbre *hi*, et une rainure rectiligne sur laquelle glisse le point *n'*, fixé à l'extrémité de la tige *v'* ; le système articulé formé par la pièce M et les tiges *ff'*, *gg'*, *eg*, *e'g'* fait que l'arbre de la roulette *hi* peut tourner autour d'un axe vertical qui passe par le centre de la roulette, tout en maintenant cet axe idéal immobile par rapport à la plaque π ; chacune des deux tiges *u*, *v* porte à son extrémité un bouton (*m*, *n*) qui glisse sur la rainure correspondante de la plaque P ; la roulette R est en contact avec la plaque P, sur laquelle elle roule sans glissement ; la distance αβ est égale à l'unité. Ces liaisons établies, si nous déplaçons le point *x*, la plaque P se mettra en mouvement, mais, comme elle ne peut pas glisser sur la roulette R, elle suivra nécessairement la direction de cette roulette ; les boutons *m*, *n* glisseront chacun sur sa rainure et le point *y* se déplacera sur son échelle . Le rapport de vitesse dy/dx est donc proportionnel à la tangente de l'angle que fait la direction de la roulette avec la tige *u*, ou, en d'autres termes, $dy/dx = y'$.

Dans les schémas, je représenterai un appareil comme celui que je viens de décrire par le symbole, figure 19, en ayant toujours soin de représenter la fonction par le point situé à gauche (y) et sa dérivée par le point situé à droite (y'). Quand il y aura plusieurs dérivées prises par rapport à une même variable, j'emploierai pour l'indiquer le symbole figure 20.

En liant mécaniquement x, y, y' (fig. 21) de manière à construire l'équation $F(x, y, y') = 0$, on a construit une équation différentielle de premier ordre.

En faisant marcher x on fait en même temps marcher y, et y' se détermine à chaque instant en vertu des liaisons imposées par l'équation construite.

On peut partir d'une paire quelconque de valeurs x et y et, généralement, on obtiendra chaque fois une intégrale particulière différente.

J'ai représenté schématiquement, comme exemples, deux appareils où sont construites des équations différentielles.

La figure 22 représente une équation du quatrième ordre entre x et y, on y voit représentées ces deux variables et les quatre premières dérivées de y. Si on fait marcher x dans cette machine, y, y', y'', y''' marcheront en même temps, la vitesse de chacun de ces points étant déterminée par la valeur actuelle de chacune des dérivées y', y'', y''', y'''' respectivement ; mais la valeur y'''' se déterminera à chaque instant, en fonction des valeurs x, y, y', grâce à l'équation $F(x, y, y', y'''') = 0$ que nous avons construite ; donc le mouvement est déterminé et nous avons construit une certaine courbe $f(xy) = 0$ qui est une solution particulière de l'équation donnée. On obtiendrait d'autres solutions particulières en partant d'autres positions initiales.

la figure 23 représente quatre équations construites entre les six variables x, y, z, u, v, t et les trois dérivées $p = du/dx$, $q = dv/dy$, $r = dt/dy$. Si on y fait marcher en même temps x et y, on détermine directement les mouvements des points u, v, t, dont les vitesses sont réglées respectivement par les valeurs actuelles des dérivées p, q, r. Les valeurs de ces trois dérivées et celle de la variable Z seront déterminées à chaque instant par les quatre équations construites ; donc le mouvement est déterminé. Généralement les valeurs finales des différentes variables représentées dépendront de la manière dont on fera varier x et y, c'est-à-dire du chemin qu'on suivra en allant du point $x_0\, y_0$, position initiale de la machine, au point $x_1\, y_1$, position où nous voulons arriver ; c'est pourquoi on n'étudie ordinairement que certains cas particuliers dont je n'ai pas à m'occuper ici. Mais, en somme, il serait toujours théoriquement possible d'établir les liaisons formulées dans un système d'équations différentielles.

Fig. 18. $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$

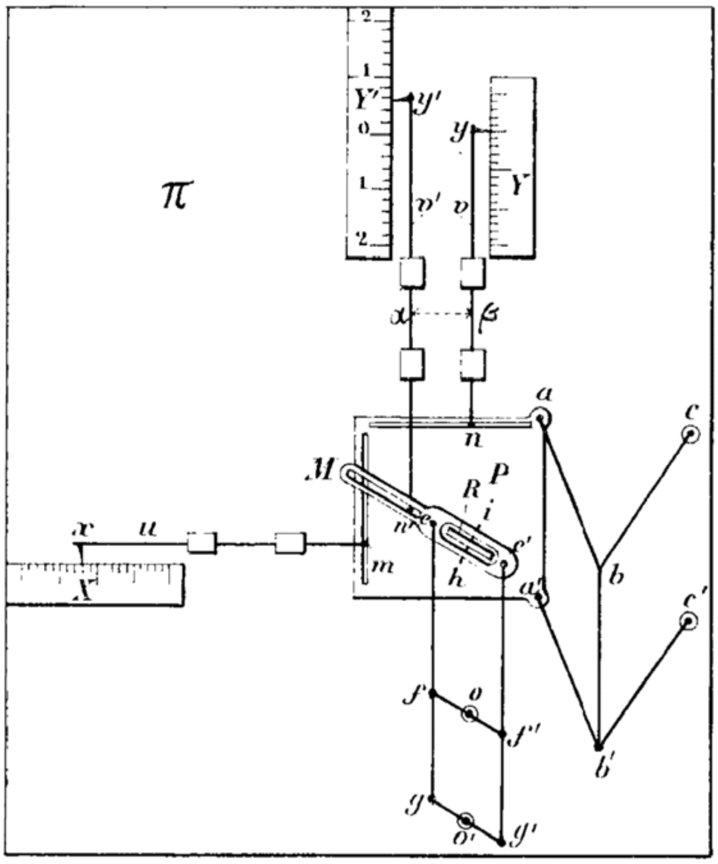


Fig. 19. $\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\right)$

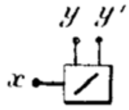


Fig. 20.

$\left(y' = \dfrac{dy}{dx}\,;\ z' = \dfrac{dz}{dx}\,;\ u' = \dfrac{du}{dx}\right)$

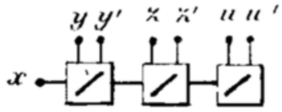


Fig. 21.

Fig. 22.

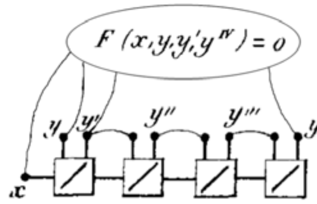
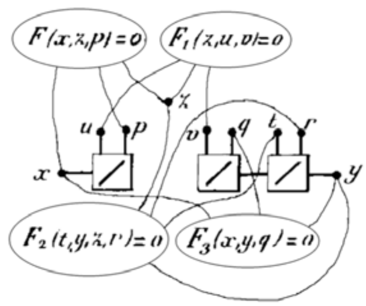


Fig. 23.



4. Aleksei Nikolaevich Krylov, Sur un intégrateur des équations différentielles ordinaires, *Bulletin de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg*, 20 (1904), 17-37.

Cette note a pour objet l'exposition du principe et une description sommaire d'un appareil destiné pour l'intégration mécanique des équations différentielles ordinaires de n'importe quel ordre et quelle forme.

En ce moment (janvier 1904) un appareil de ce genre est en cours de construction d'après mes plans chez M. R. Wetzer, mécanicien de précision à St.-Pétersbourg.

Il paraît que la première idée de l'intégration des équations différentielles à l'aide d'un appareil mécanique appartient à Lord Kelvin [...].

Des recherches théoriques sur les vibrations des coques des navires exigeaient une intégration approximative d'une certaine équation différentielle linéaire du quatrième ordre à coefficients variables. La méthode d'approximation dite des quadratures mécaniques conduisait à des calculs fort pénibles, et j'ai résolu à recourir à la machine de Lord Kelvin et d'en faire construire une pour le Bassin Expérimental de la Marine, dont la direction m'est confiée. En étudiant le schéma du mécanisme pour en faire les plans d'exécution j'ai remarqué que le système proposé par Lord Kelvin pouvait être rendu aisément exécutable en pratique par l'introduction de deux mécanismes auxiliaires que je nomme *le multiplicateur* et *l'égaliseur* et que ces deux mécanismes augmentent notablement la portée des différentes applications de la machine. [...]

En posant $n = 2$ on voit immédiatement quelle simplification et quelle généralisation est apportée par l'adjonction du multiplicateur et de l'égaliseur à la méthode de Lord Kelvin pour intégrer même l'équation linéaire du second ordre.

Plus de calculs auxiliaires, plus de changement de variables à faire, plus de variation de constantes arbitraires pour avoir l'intégrale de l'équation avec second membre. On prend l'équation telle qu'elle est proposée et on en représente par des gabarits en zinc ou en carton les coefficients.

Ainsi l'intégration des équations linéaires à coefficients variables et avec second membre se trouve pratiquement effectuée par une chaîne cinématique fermée et qui consiste d'intégrateurs, de multiplicateurs et de l'égaliseur. le nombre d'intégrateurs est égal à l'ordre de l'équation, le nombre de multiplicateurs est égal au nombre de coefficients différents de 1, le nombre d'éléments de l'égaliseur est égal au nombre des termes de l'équation. Ainsi pour toutes les équations linéaires la machine reste la même ce ne sont que les gabarits représentant les coefficients qui changent, comme par exemple les plaques perforées dans le métier Jacquart ou dans les caisses à musique.

Considérons maintenant des équations plus générales que les équations linéaires [...].

On voit par ceci que l'introduction des deux mécanismes – le multiplicateur et l'égaliseur, donne un moyen pratique permettant d'appliquer la machine pour intégrer les équations différentielles ordinaires de toutes les formes qu'il est possible de représenter par des gabarits plans et de tous les ordres, ou des systèmes de telles équations.

Le mécanisme reste toujours le même, ce ne sont que les gabarits qui changent *en restant toujours plans*, donc aisément exécutables en pratique. [...]

Après avoir esquissé le principe de la machine et les résultats qu'elle peut fournir je ferai quelques remarques sur la manière dont elle va être réellement construite.

En premier lieu il fallait faire un choix d'intégrateurs, car on voit bien qu'il n'est nullement indispensable de faire usage de l'intégrateur de J. Thomson. Tout appareil qui est capable de donner continuellement la valeur de l'intégrale $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$, comme fonction de la limite supérieure, est également applicable.

Il y a même des doutes très sérieux que le mécanisme de Thomson puisse en général marcher ou fournir des résultats précis étant appliqué dans ma combinaison.

En effet quand cet intégrateur est employé pour le calcul de l'intégrale $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$, la fourche est conduite *à la main* ou par un gabarit recevant son mouvement du disque, pouvant donc exercer sur la fourche n'importe quel effort. La transmission du mouvement du disque au cylindre se fait par l'intermédiaire du globe en *raison du frottement* entre la surface du globe et du disque et entre le globe et le cylindre. Il ne doit pas y avoir de *glissement*, qui fausserait les indications de l'appareil.

Tant que le dit frottement n'a qu'à vaincre la résistance dans les tourillons du cylindre et celles de la partie inscrivante, l'appareil peut très bien marcher car le frottement sur le globe peut être rendu très grand en comparaison avec ces résistances nuisibles.

Il en est tout autrement quand l'appareil fait partie de la machine à intégrer les équations différentielles, le cylindre doit alors mener tout un train de mécanismes auxiliaires, les résistances nuisibles peuvent s'accumuler notablement, le frottement entre le globe et le disque, et entre le gobe et le cylindre peut devenir insuffisant et un petit glissement peut faire écrouler tout l'échafaudage.

Il fallait donc choisir un mécanisme où l'on puisse aisément faire varier l'effort et où il y ait une transmission moins délicate qu'entre le globe et le cylindre. Je me suis arrêté sur le principe de l'intégraphe de M. Abdanck-Abakanowicz en modifiant convenablement la construction de cet appareil. [...]

Quel est le degré de précision que l'on peut attendre d'un appareil, tel que celui dont je viens de donner la description ? Ayant dans le Bassin Expérimental une expérience journalière dans le maniement de planimètres de différents modèles et ayant étudié soigneusement l'intégraphe de M. Abdanck-Abakanowicz, je compte pour des équations peu compliquées, les équations linéaires par exemple, de réaliser une précision telle que l'erreur absolue dans les ordonnées des courbes représentant l'intégrale générale et ses dérivées ne surpasse pas un $\frac{1}{2}$ millimètre, c'est-à-dire que l'erreur relative pour les ordonnées moyennes d'une longueur de 100 à 150 millimètres ne surpasse pas un $\frac{1}{2}$ % ; une telle précision est plus que suffisante dans les problèmes pratiques de l'art de l'ingénieur.

Tout le soin possible sera appliqué à obtenir la plus grande précision sans trop compliquer la construction de l'appareil ; l'outillage excellent des ateliers de M. Wetzer, la manière consciencieuse avec laquelle tous ses travaux sont exécutés et son expérience pratique acquise par quarante ans de labeur m'en paraissent une garantie plus que suffisante.

5. Vannevar Bush, The differential analyser. A new machine for solving differential equations, *Journal of The Franklin Institute*, 212 (1931), 447-488 (trad. D. Tournès)

La technologie a énormément évolué depuis l'époque où Sir William Thomson suggéra pour la première fois, il y a plus de cinquante ans, que les intégrateurs conçus par son frère pouvaient être connectés entre eux et contraints par là à produire des solutions d'équations différentielles. L'idée pouvait difficilement être mise en pratique, pour la simple raison qu'un intégrateur, qui est simplement une transmission à vitesse variable, ne pouvait pas encore être construit de sorte qu'il soit à la fois précis et capable de supporter une charge suffisante pour mouvoir de nombreuses pièces mécaniques.

Le présent appareil reprend la même idée de base de l'interconnexion d'unités d'intégration [...].

La machine ainsi construite est destinée à la solution d'équations différentielles de tout ordre jusqu'au sixième [...]. La fréquence d'apparition des problèmes mettant en jeu deux ou trois équations simultanées du second ordre rend cette limite convenable, même s'il serait facile d'aller au-delà. Il est possible, lorsque les courbes ont été tracées et qu'un diagramme donnant les échelles et les connexions a été élaboré, de préparer la machine pour un problème donné en quelques heures. Le temps nécessaire à l'obtention des solutions varie avec la complexité du problème et la précision souhaitée ; dans des cas représentatifs, il est de l'ordre de dix minutes pour chaque solution correspondant à un ensemble de conditions initiales. Bien entendu, il faut de l'expérience pour utiliser l'appareil efficacement. C'est d'ailleurs l'un des aspects les plus séduisants de la machine ; une fois cette expérience acquise, on accède à une perception tout à fait nouvelle de la nature innée d'une équation différentielle.

6. Douglas Hartree, The differential analyser, *Nature*, 135 (1935), 940-943 (trad. D. Tournès)

L'application des mathématiques aux problèmes de la science pure et appliquée conduit souvent à des équations différentielles qui n'ont pas de solutions formelles par quadratures ni en termes de fonctions tabulées, mais pour lesquelles on a cependant besoin de valeurs numériques des solutions. Jusqu'à récemment, les seules méthodes disponibles pour l'évaluation des solutions de telles équations étaient les méthodes graphiques, qui sont assez limitées en étendue et en précision, et les méthodes numériques, qui sont longues et nécessitent en permanence une grande concentration de la part du calculateur, et deviennent rapidement très fastidieuses lorsque les équations sont plus complexes. C'est pourquoi le développement d'une méthode mécanique, rapide, précise et applicable à une large gamme d'équations constitue un progrès d'une importance considérable, avec des applications à un grand nombre de problèmes dans le domaine scientifique et technique.

[...] Puisque l'analyseur différentiel traite une situation mathématique sans référence au problème particulier, physique ou technique, qui a donné naissance à cette situation, ce problème lui-même est sans rapport direct avec la machine ; cependant, afin de préciser son intérêt, on peut mentionner quelques problèmes auxquels elle peut être appliquée :

(a) Structure atomique et propriétés.

(b) Coupures dans les circuits électriques contenant des éléments avec des caractéristiques non linéaires.

(c) Réalisation de mécanismes à contrôle automatique.

(d) Propagation d'ondes radio dans une couche de Heaviside, considérée comme un milieu stratifié.

(e) Vibrations de systèmes soumis à des forces non linéaires.

(f) Trajectoires de particules électrisées dans un champ magnétique (par exemple, en connexion avec la théorie des aurores boréales et des radiations cosmiques).

(g) Équilibre et stabilité des structures stellaires.

De par sa nature, l'analyseur différentiel fournit une solution numérique (ou graphique) d'une équation pour des valeurs numériques déterminées des coefficients de l'équation et des conditions initiales, et ne peut pas produire une solution analytique générale ; en fait, un de ses mérites est qu'il peut être appliqué à des équations pour lesquelles aucune solution analytique n'existe. C'est pourquoi il ne semble pas être d'un grand intérêt ni d'une grande valeur dans des domaines purement mathématiques, là où l'intérêt, s'il y en a un, de la solution d'une équation réside dans la forme générale de la solution ou dans son expression analytique formelle. D'un autre côté, dans les recherches physiques et techniques, ce sont souvent des solutions particulières et leurs valeurs numériques réelles qui sont demandées ; et il peut arriver que même s'il existe une solution analytique formelle, elle se révèle inadaptée en vue d'une évaluation numérique. Aussi c'est principalement en lien avec de telles applications que l'usage de l'analyseur différentiel est approprié.