

Construction d'équations algébriques et différentielles

Contribution proposée par Dominique Tournès, maître de conférences à l'IUFM de la Réunion

Adresse électronique : dominique.tournes@wanadoo.fr

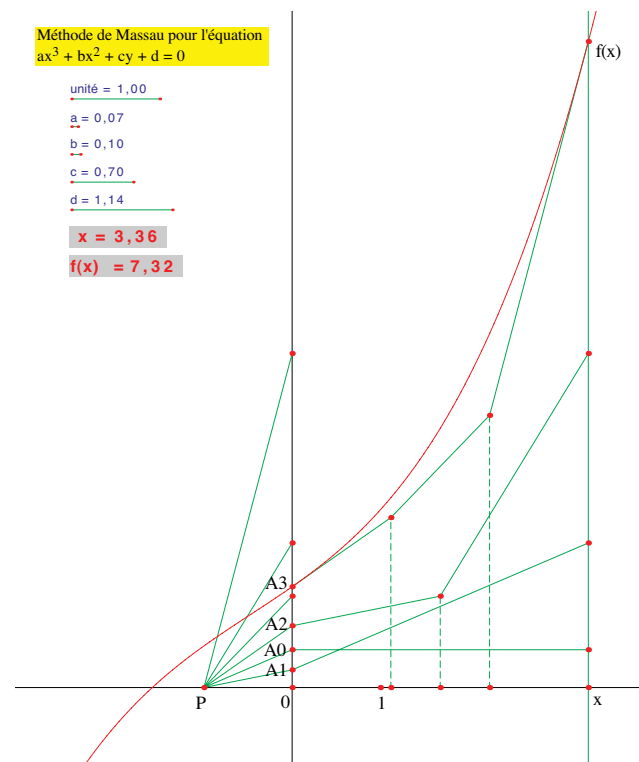
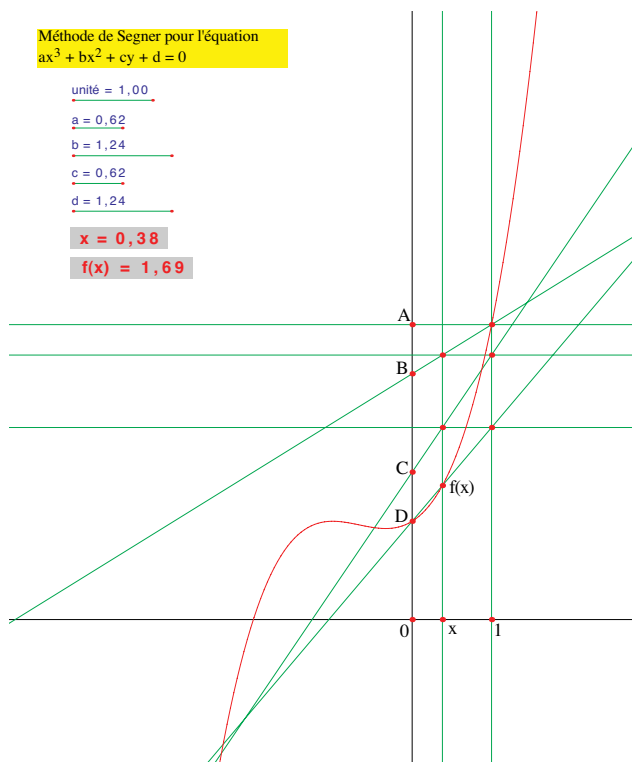
Adresse postale : IUFM de la Réunion, allée des Aigues Marines, Bellepierre, 97487 Saint-Denis cedex

Avant l'apparition des ordinateurs, les scientifiques et les ingénieurs avaient abondamment recours au calcul graphique, moins coûteux en temps et en énergie que le calcul numérique aux tables de logarithmes. Ce calcul se faisait sur l'épure, au moyen de la règle, du compas et des instruments usuels de dessin (calcul par le trait), ainsi qu'à l'aide d'appareils plus élaborés comme des systèmes articulés ou des instruments mécaniques d'intégration (calcul graphomécanique). De nos jours, des logiciels tels que Cabri ou Excel permettent de simuler numériquement, dans un but didactique, les techniques graphiques d'antan. Je propose donc de présenter quelques méthodes plus ou moins connues de construction des équations algébriques et différentielles, et de suggérer leurs possibles applications pédagogiques, tant dans les classes de lycée qu'en formation des enseignants.

Pour résoudre graphiquement les équations algébriques et pour interpoler les fonctions transcendentes, on s'est attaché depuis longtemps à concevoir des constructions exactes, par points ou par points et tangentes, des fonctions polynomiales. Je montrerai avec Cabri les procédés les plus classiques en me plaçant systématiquement, pour fixer les idées, dans le cas du troisième degré (bien que toutes

les méthodes se généralisent de façon naturelle à un degré quelconque). Les avantages de Cabri sont évidents (voir figures ci-dessous) : l'outil "lieu" permet d'obtenir toute la courbe à partir de la construction générique d'un seul point ; grâce à des curseurs, une figure unique contient le tracé de tous les polynômes du troisième degré ; la calculatrice intégrée permet de contrôler numériquement des constructions entièrement réalisées à la règle et au compas. Chaque idée historique est riche d'activités mathématiques potentielles : Descartes utilise l'intersection d'une parabole fixe et d'un cercle, tandis que Newton préfère l'intersection d'une cubique fixe et d'une droite ; les méthodes de Segner et de Lill sont des traductions graphiques du schéma de Horner, destinées à minimiser le nombre de tracés élémentaires à effectuer ; la méthode de Kempe repose sur la transformation du polynôme en polynôme trigonométrique ; enfin, Massau interprète graphiquement la formule de Taylor à partir de l'idée toute simple que, pour construire un polynôme de degré n , il suffit d'intégrer n fois, sous forme graphique, sa dérivée n -ième, qui est une constante.

Pour le cas des courbes transcendentes définies par des équations différentielles, les géomètres ont, depuis les origines du calcul infinitésimal, construit ces courbes



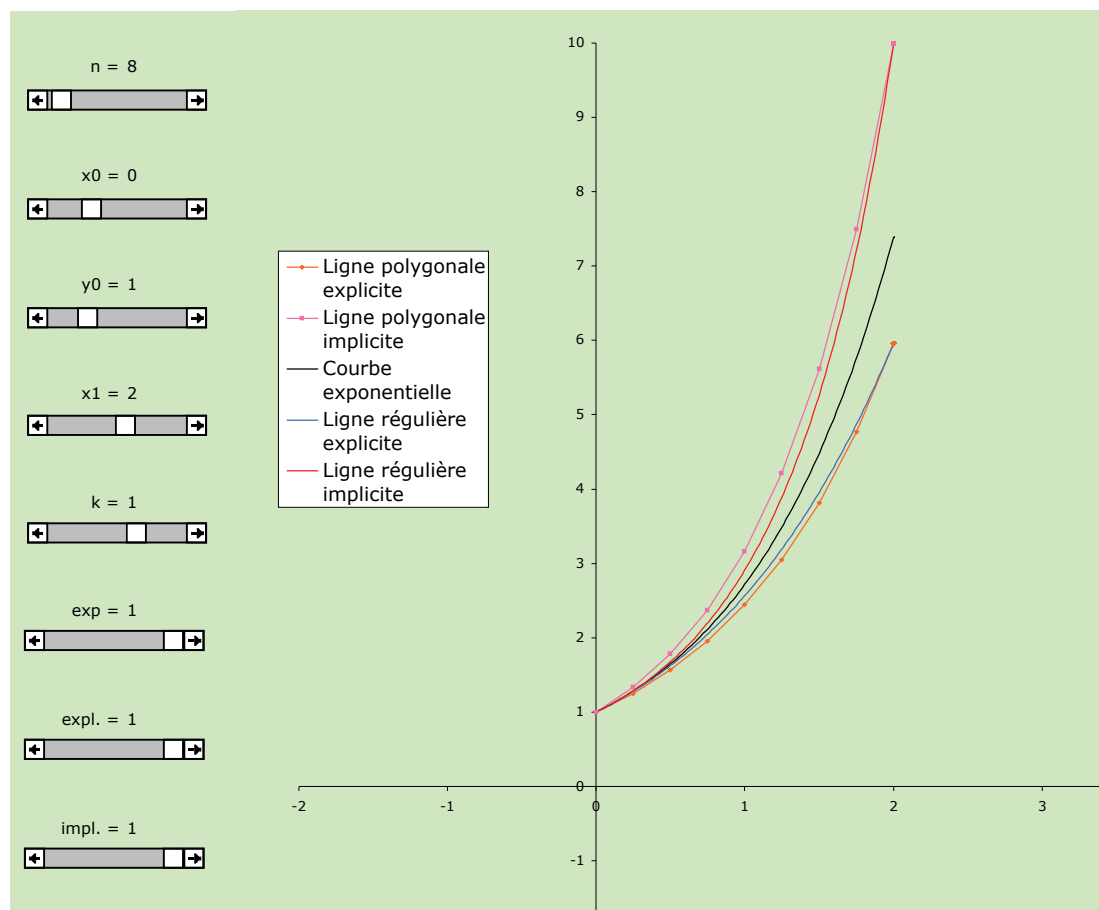
Construction avec Cabri des polynômes du troisième degré par les méthodes de Segner et de Massau

par petits segments de tangentes ou par petits arcs de cercles osculateurs. J'insisterai longuement sur la méthode d'Euler, qui occupe actuellement une large place dans les programmes de mathématiques et de sciences physiques des classes de Première et Terminale. Comme il arrive souvent, la méthode dite "d'Euler" a été pratiquée bien avant Euler. J'illustrerai avec Cabri des constructions historiques peu connues : tracé de la courbe logarithmique par Descartes et de l'isochrone paracentrique par Leibniz, étude graphique du mouvement des planètes par Newton sous différentes hypothèses de gravitation. Je présenterai ensuite une feuille de calcul Excel destinée à la découverte en profondeur de la méthode d'Euler-Cauchy sur l'exemple des exponentielles (voir ci-dessous) : des curseurs permettent une expérimentation interactive en faisant varier les valeurs initiales et finales, la base de l'exponentielle et le nombre d'intervalles de la subdivision, tandis que d'autres curseurs, de type logique, font apparaître progressivement des courbes complémentaires utiles. En parallèle avec le calcul par le trait, les géomètres ont également imaginé de tracer les courbes intégrales d'un trait continu par l'emploi du mouvement tractionnel. Après divers instruments expérimentaux au dix-huitième siècle, des instruments professionnels, appelés "intégraphes", ont été commercialisés et abondamment utilisés à partir de la fin du dix-neuvième siècle. Je montrerai avec Cabri des exemples de simulation du fonctionnement de ces appareils.

Les figures interactives que je propose se prêtent à deux types d'applications dans l'enseignement. Tout d'abord, elles peuvent être mises telles quelles entre les

maines d'élèves de lycée, comme des boîtes noires, dans un but d'expérimentation et de simulation. Ainsi, pour reprendre l'exemple de la résolution approchée des équations algébriques, on disposera de deux cadres de travail permettant des comparaisons fructueuses : la construction géométrique de l'équation et la lecture graphique des solutions d'une part, la calculatrice et les méthodes classiques d'approximation numérique d'autre part. Sachant que certaines des méthodes que j'ai exposées ont conduit à des instruments assez simples à fabriquer (avec du carton ou des transparents), on pourra même les appliquer "à l'ancienne", sans avoir besoin de les simuler, ce qui offrira un troisième cadre éventuel de manipulation. À un autre niveau, l'étude théorique de telle ou telle de ces méthodes, avec les démonstrations sous-jacentes (toujours accessibles à un élève de lycée), fournira le thème de travaux dirigés et de problèmes sortant de l'ordinaire.

En second lieu, en formation initiale ou continue des enseignants, on peut proposer la construction proprement dite des figures par les stagiaires eux-mêmes. Ainsi que je l'ai expérimenté à plusieurs reprises, cela entraîne des remises en question significatives. Réaliser, par exemple, une figure Cabri qui marche aussi pour des valeurs négatives ou nulles des coefficients du polynôme et de la variable, est un excellent point de départ pour motiver un retour sur des fondements de la géométrie que l'on croyait bien maîtrisés, mais qui se révèlent soudain peu solides et inopérants : correspondance entre nombres et grandeurs géométriques, distinction entre propriétés affines et propriétés métriques, intérêt d'une géométrie orientée, etc.



Construction avec Excel des fonctions exponentielles par la méthode d'Euler