# Introduction au thème des machines à intégrer

## Qu'est ce qu'intégrer ?

En termes mathématiques, intégrer revient par exemple à calculer l'aire d'une surface.
Ressortons de nos vieux souvenirs un repère à deux axes X et Y– (*figure 1*).

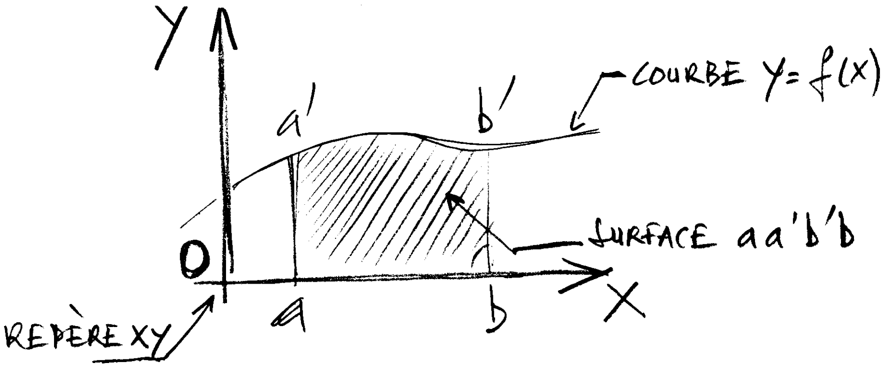



FIGURE 1

Imaginons dans ce repère une courbe. Eh bien, en intégrant la fonction représentée par la courbe entre deux valeurs a et b de X on trouve l'aire de la surface délimitée par les points a, a', b, b'.
Dès lors que l'on a l'équation de la courbe f(x), ce travail peut se faire au moyen d'outils mathématiques.

Prenons un exemple simple : soit la courbe d'équation Y = X – (*figure 2*).

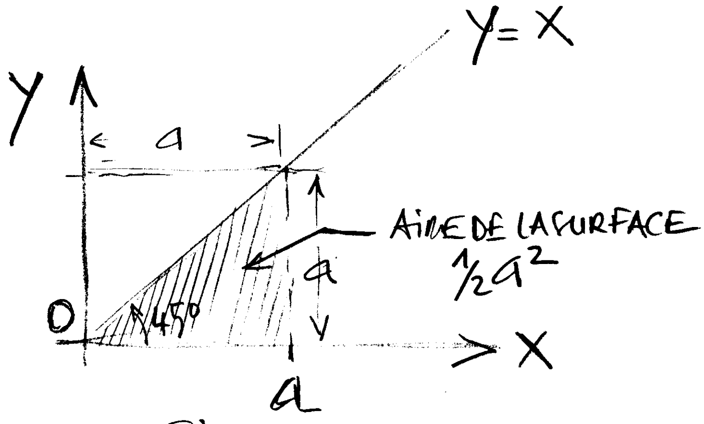



FIGURE 2

Bravo ! c'est une droite qui passe par l'origine du repère et qui a une pente de 45°.
Imaginons que l'on souhaite intégrer cette courbe entre les valeurs 0 et a. La surface

ainsi définie se présente comme un triangle rectangle et isocèle. Son aire peut s'exprimer par la moitié du carré de côté « a », soit 1/2 $a^2$.
Tout semble aller assez bien lorsque l'on a des surfaces définies par des courbes d'équation connues. Mais est-ce toujours le cas ?

## A quoi sert d'intégrer ?

Imaginons une courbe relevée de façon expérimentale. Son tracé ne répond pas obligatoirement à une équation définie.

Par exemple, si l'on prend la courbe représentant l'évolution de la force reçue par le piston d'un moteur à explosion et due à la pression dans le cylindre au cours d'un cycle (admission, compression, détente et échappement) – (*figure 3*).

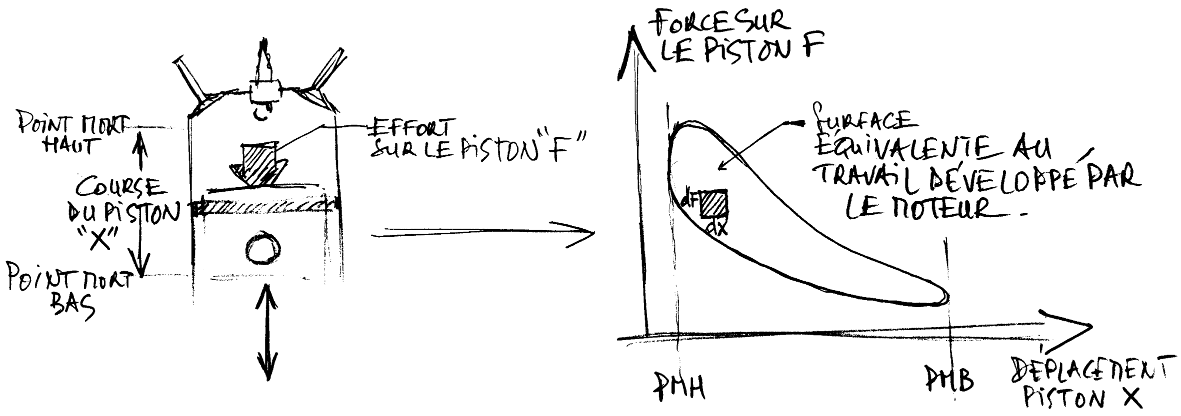


FIGURE 3

Un capteur de pression placé dans le cylindre et combiné à un capteur de déplacement du piston m'ont permis de relever ce diagramme et de l'inscrire dans un repère X, Y. Aucune équation connue ne correspond à cette courbe expérimentale, la surface décrite s'avère donc difficile à évaluer.

Et pourtant cette surface intéresse énormément les motoristes.
En effet, cette surface est une somme de petits carrés dont la surface correspond au produit d'une unité de force par une unité de déplacement. Mais une force multipliée par un déplacement, cela devrait nous donner un travail.
Donc, si je parviens à savoir combien de petits carrés peuvent prendre place dans la surface décrite par le diagramme, je pourrais connaître le travail développé par le moteur. Intéressant !

## Comment intégrer ?

On peut par exemple compter le nombre de carrés situés à l'intérieur du diagramme. Mais que fait-on des carrés se trouvant à cheval sur sa frontière ? On peut alors prendre en compte des carrés plus petits, voire de plus en plus petits, pour que l'erreur soit la plus faible possible… (*figure 4*), mais cela devient fastidieux.

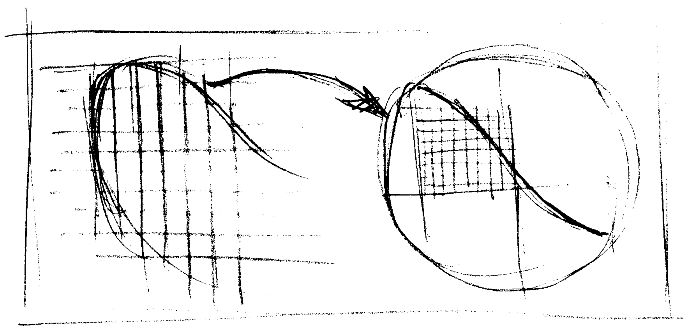


FIGURE 4

Voici un « truc » : Prenez votre diagramme, agrandissez-le sur une feuille de carton dont vous connaissez parfaitement le grammage (le rapport masse/surface). Découpez-le avec le plus grand soin possible et pesez-le. Son poids est évidemment proportionnel à sa surface. C'est malin, mais tout de même peu satisfaisant pour un mathématicien.

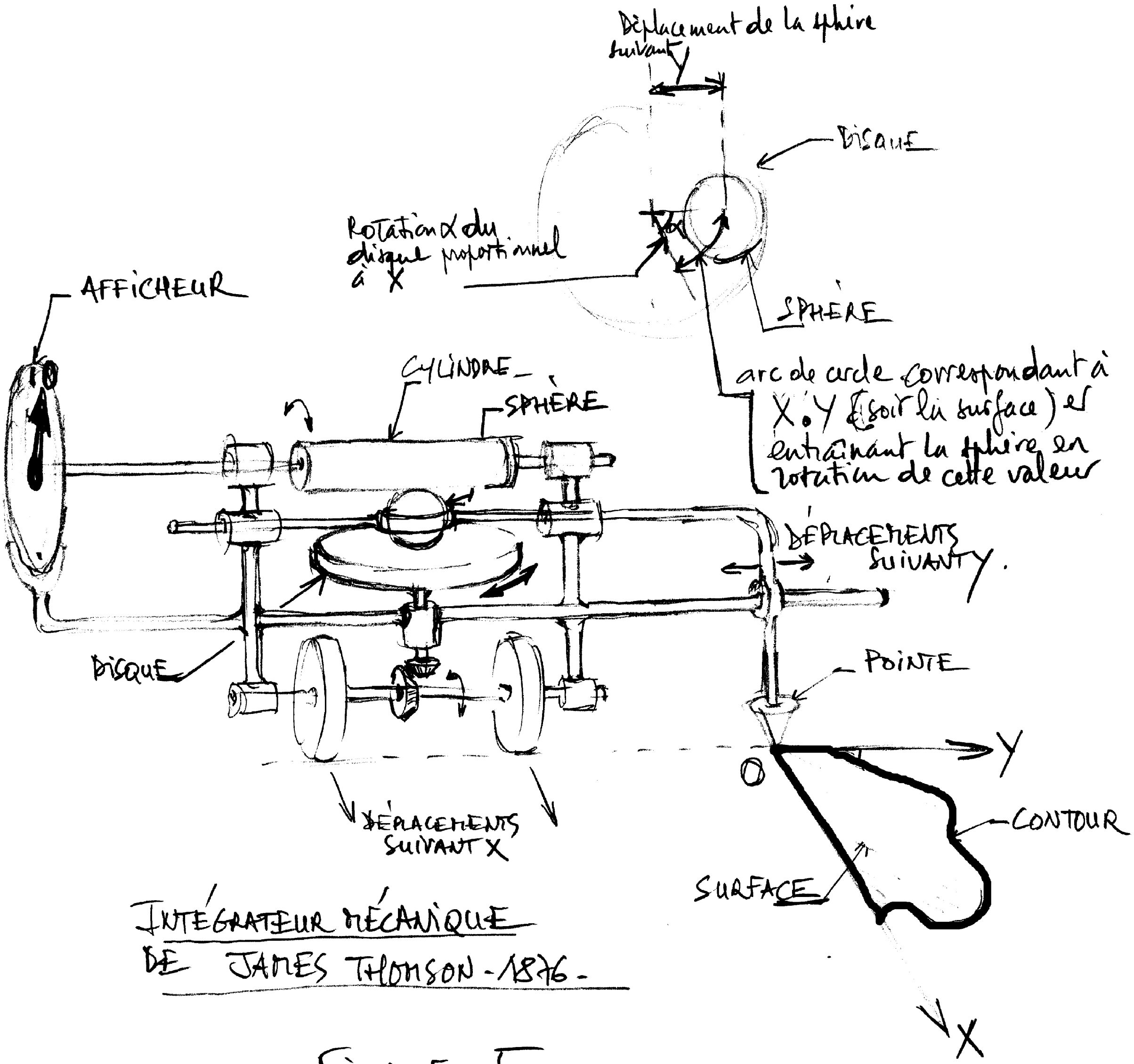
## La machine à intégrer (*figure 5*)

Imaginons une machine munie d'une pointe et d'un afficheur. Imaginons toujours qu'en suivant le contour d'une surface quelconque avec sa pointe, elle indique directement sur son afficheur la valeur de l'aire dont on a suivi le contour. Eh bien, cette machine existe : il s'agit d'un intégrateur.

### Un intégrateur, comment ça marche ?

Comment marche une machine capable d'effectuer instantanément le produit X par Y des éléments de surface composant l'aire recherchée ?
Il faut que, lorsque l'on déplace sa pointe, chaque millimètre de déplacement puisse être repéré comme une variation définie de X et une variation définie de Y. Il faut, de plus, que le dispositif permette automatiquement d'effectuer le produit de la variation de X par la variation de Y, afin d'indiquer la surface correspondante.

## L'intégrateur mécanique de James Thomson (1876)




INTÉGRATEUR MÉCANIQUE DE JAMES THOMSON - 1876 -

FIGURE 5

Lorsque la pointe de l'intégrateur se situe à l'origine en 0, l'afficheur est réglé à 0 et la sphère est au centre du disque. On remarque que lorsqu'on déplace la pointe suivant l'axe Y exclusivement (c'est-à-dire sans induire de variation de X) la sphère se déplace sur le disque sans produire la rotation du cylindre, donc de variation de l'afficheur.

Si maintenant, en partant de l'origine, on déplace la pointe sur l'axe des X (sans induire de variation de Y), la sphère demeure au centre du disque, lequel tourne, mais sans que cela ait de conséquence, cette fois encore, sur l'afficheur.

Mais si l'on déplace la pointe simultanément selon X et Y, pour suivre par exemple le contour de la courbe représentée, alors, d'une part, la sphère s'écarte du centre du disque d'une valeur équivalente à Y et le disque tourne d'un angle proportionnel à X. L'afficheur et le cylindre sont entraînés par la sphère.

**Quelle va être la rotation de cette sphère écartée du centre du disque d'une valeur Y et roulant sur un disque tournant d'un angle équivalent à X ?**

Eh bien, cette sphère, entraînée par le disque va tourner d'une valeur égale à l'arc de cercle défini par le rayon Y et l'angle X. Ah ! Comment exprime t-on un arc de cercle ? S'il était question d'un cercle complet, vous auriez dit que l'arc était alors une circonférence et que sa valeur était *2.P.R*, ou plutôt ici *2.P.Y*.

Pour l'arc, ce sera la même expression mais limitée à la valeur de l'angle en radian (ici, l'équivalent de X en radian), soit finalement le produit de X par Y. Mais X multiplié par Y, c'est aussi l'expression de la surface dont la pointe a suivi le contour.
En roulant sur un arc de cercle, la sphère effectue mécaniquement la multiplication de X par Y, qui se répercute par une rotation du cylindre et de l'afficheur sur lequel on peut lire le produit X.Y équivalent à l'aire de la surface.

Serge Picard, décembre 2006.