

CONSTRUCTION D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES ET DIFFÉRENTIELLES

Dominique Tournès, maître de conférences à l'IUFM de la Réunion et chercheur associé au CNRS (équipe REHSEIS, UMR 7596)

Avant l'apparition des ordinateurs, les scientifiques et les ingénieurs avaient abondamment recours au calcul graphique, moins coûteux en temps et en énergie que le calcul numérique avec les tables de logarithmes. Ce calcul se faisait sur l'épure, au moyen de la règle, du compas et des instruments usuels de dessin (calcul par le trait), ainsi qu'à l'aide d'appareils plus élaborés comme des systèmes articulés ou des instruments mécaniques d'intégration (calcul graphomécanique). De nos jours, des logiciels tels que Cabri Géomètre ou Excel permettent de simuler numériquement, dans un but didactique, les techniques graphiques d'antan. Je propose donc de présenter ici quelques méthodes plus ou moins connues de construction des équations algébriques et différentielles, et de suggérer leurs possibles applications pédagogiques, tant dans les classes de lycée qu'en formation des enseignants.

1. CONSTRUCTION D'ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

Pour résoudre graphiquement les équations algébriques, on s'est attaché depuis longtemps à concevoir des constructions exactes, par points ou par points et tangentes, des fonctions polynomiales. Je vais parcourir avec Cabri les procédés les plus classiques en me plaçant systématiquement, pour fixer les idées, dans le cas du troisième degré (bien que toutes les méthodes se généralisent de façon naturelle à un degré quelconque). Le cas du second degré, trop simple, n'aurait guère d'intérêt à être travaillé pour lui-même avec des lycéens, si ce n'est pour comparer les résultats obtenus graphiquement avec ceux qui sont fournis par les formules classiques de résolution par radicaux. Quant aux degrés supérieurs au troisième, ils entraîneraient des constructions inutilement longues risquant de masquer les idées mathématiques sous-jacentes.

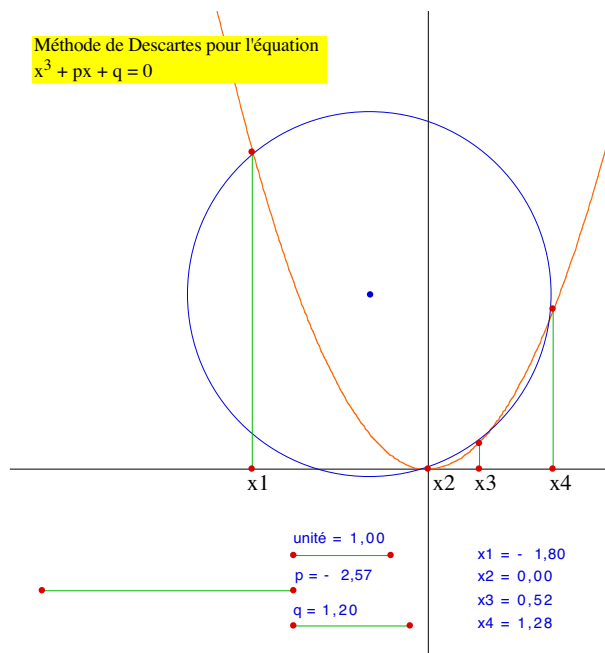
1.1. Les paraboles cartésiennes

Dans le troisième chapitre de sa *Géométrie* de 1637, intitulé « De la construction des problèmes qui sont solides ou plus que solides », Descartes propose une construction générale des équations du troisième et du quatrième degrés par intersection d'une parabole et d'un cercle qui, en substance, peut se traduire par les calculs suivants :

$$\begin{aligned}x^4 + px^2 + qx + r = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 + (p-1)y + qx + r = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ \left(x + \frac{q}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{q^2 + (p-1)^2}{4} - r. \end{cases}\end{aligned}$$

Les solutions apparaissent ainsi comme les abscisses des points d'intersection d'une parabole

fixe et du cercle de centre $\left(-\frac{q}{2}, \frac{1-p}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{q^2 + (p-1)^2 - 4r}}{2}$. Ce cercle est constructible à la règle et au compas. En faisant $r = 0$ dans ce qui précède, on s'aperçoit que la méthode fournit également les racines de l'équation du troisième degré $x^3 + px + q = 0$, une fois écartée la solution parasite $x = 0$. Dans ce cas, le cercle est particulièrement simple à construire, car il passe par l'origine. Mais, le plus important, c'est l'utilisation d'une parabole fixe : une fois qu'on a découpé avec soin une telle parabole dans une feuille de carton ou de métal, ou qu'on l'a tracée minutieusement sur un transparent, on dispose d'un nouvel instrument de dessin qui, joint à la règle et au compas, permet de rendre constructibles tous les problèmes du troisième et du quatrième degrés.



Avec Cabri, la construction est simple et directe. Grâce à la présence de curseurs pour représenter les coefficients, une figure unique contient la solution graphique de toutes les équations réduites du troisième degré : en faisant varier p et q , les élèves observeront qu'il peut y avoir entre une et trois racines réelles. Il sera également intéressant pour eux de comparer les valeurs approchées des solutions mesurées sur la figure avec celles qui sont fournies par des algorithmes numériques mis en œuvre sur une calculatrice.

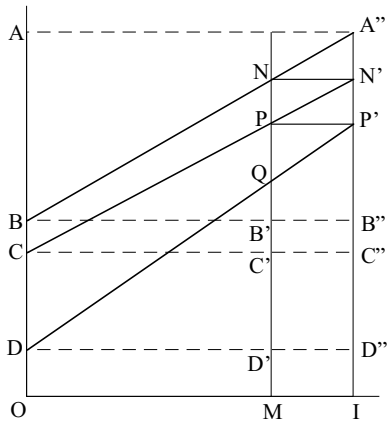
Un travail analogue pourra être réalisé pour le quatrième degré, où l'on retrouvera le troisième degré comme cas particulier.

Une variante de cette méthode a été proposée un peu plus tard par Isaac Newton, qui détermine de son côté les racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ par l'intersection de la cubique $y = x^3$ et de la droite $y + px + q = 0$. Une fois que la cubique a été découpée avec soin sur une plaque ou construite sur un transparent, la résolution de n'importe quelle équation du troisième degré est ramenée au simple tracé d'une droite. Là encore, on imagine facilement les riches activités que l'on peut conduire en classe, que ce soit avec ou sans l'intervention d'un logiciel de géométrie dynamique.

1.2. Un équivalent graphique de la méthode de Horner

Dans la seconde moitié du dix-septième siècle et la première moitié du dix-huitième, la construction des équations suscite l'intérêt d'un grand nombre de mathématiciens. De manière générale, comme nous l'avons vu chez Descartes et Newton, on cherche à résoudre les équations $f(x) = 0$ par le tracé et l'intersection de deux courbes algébriques $g(x, y) = 0$ et $h(x, y) = 0$ choisies parmi les plus « simples » possibles. Dans cette affaire, la notion de simplicité varie largement d'un auteur à l'autre, les critères retenus pouvant être d'ordre théorique (degrés les plus bas possibles, courbes appartenant à certaines classes) ou pratique (facilité du tracé, contraintes liées aux instruments). Ce qui peut aujourd'hui nous surprendre,

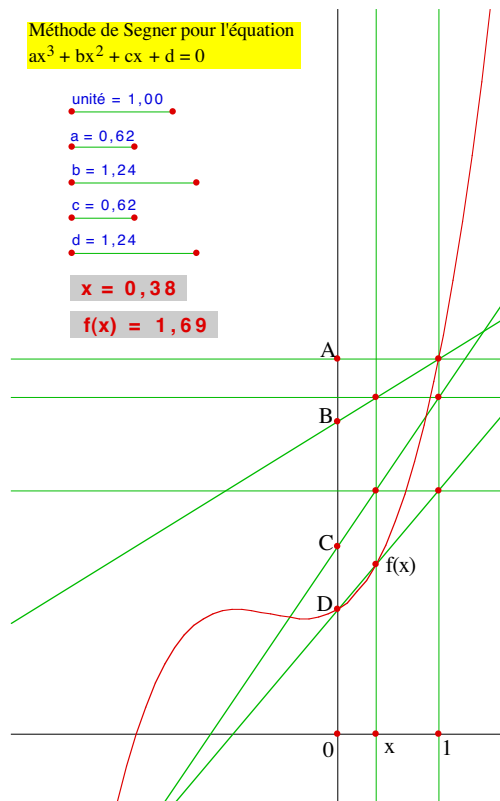
c'est que, pendant plus d'un siècle, personne n'a pensé à construire directement par points la courbe $y = f(x)$ et à examiner son intersection avec la droite $y = 0$. Cette méthode universelle de résolution, qui nous est maintenant si familière, semble avoir été publiée pour la première fois en 1761 par Johann Andreas von Segner, un Hongrois très renommé en son temps, qui fut notamment le premier professeur de mathématiques à Göttingen lors de la création de la chaire en 1735. La méthode est valable pour une équation $f(x) = 0$ de degré n , mais il suffira de l'expliquer dans le cas d'une équation du troisième degré, en prenant $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



Après avoir choisi une unité, on place sur l'axe des ordonnées les points D, C, B, A tels que $\overline{OD} = d$, $\overline{DC} = c$, $\overline{CB} = b$, $\overline{BA} = a$, et sur l'axe des abscisses les points I, M tels que $\overline{OI} = 1$, $\overline{OM} = x$. Toutes les données étant ainsi en place, on construit successivement les points N, N', P, P', Q comme sur la figure ci-contre. On a alors $\overline{MQ} = f(x)$ d'après les égalités suivantes :

- $\overline{B'N} = \overline{B''A''} \cdot x = ax$;
- $\overline{C'N} = \overline{C'B'} + \overline{B'N} = ax + b$;
- $\overline{C'P} = \overline{C''N'} \cdot x = \overline{C'N} \cdot x = (ax + b)x$;
- $\overline{D'P} = \overline{D'C'} + \overline{C'P} = (ax + b)x + c$;
- $\overline{D'Q} = \overline{D''P'} \cdot x = \overline{D'P} \cdot x = ((ax + b)x + c)x$;
- $\overline{MQ} = \overline{MD'} + \overline{D'Q} = ((ax + b)x + c)x + d$.

Méthode de Segner pour l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$



La construction de Segner apparaît ainsi comme un équivalent graphique de l'algorithme de Horner utilisé pour le calcul numérique de $f(x)$. Dans un cas, il s'agit de minimiser le nombre de multiplications à effectuer, dans l'autre, le nombre de parallèles à construire. Pour trouver les racines de l'équation $f(x) = 0$, on procédait traditionnellement par tâtonnements, en essayant plusieurs valeurs de x jusqu'à ce qu'on ait obtenu une précision convenable, tout comme on le fait, par exemple, dans l'algorithme numérique de dichotomie. Avec Cabri, on peut aujourd'hui tracer automatiquement le lieu du point Q lorsque le point M décrit l'axe des abscisses. On obtient ainsi une construction par points de la courbe polynomiale $y = f(x)$ permettant de découvrir graphiquement le nombre de racines et de mesurer des valeurs approchées de chacune d'elles (pour cela, on déplace simplement le point x sur l'axe des abscisses jusqu'à ce que $f(x) = 0$).

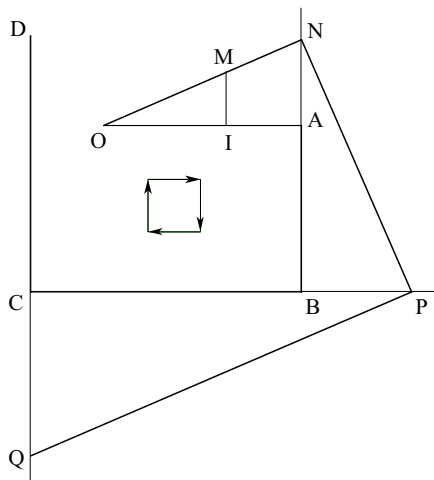
Une telle figure interactive – comme d'ailleurs toutes celles qui sont proposées dans cette communication – se prête à deux types d'applications dans l'enseignement. Tout d'abord, elle peut être mise telle quelle entre les mains de lycéens, comme une boîte noire, dans un but d'expérimentation et de simulation. La construction géométrique de l'équation et la lecture

graphique des solutions devient alors un nouveau cadre de travail fructueux à mettre en parallèle avec le cadre plus usuel des méthodes d'approximation numérique et de la calculatrice.

En second lieu, en formation initiale et continue des enseignants, on peut proposer la construction proprement dite de la figure par les stagiaires eux-mêmes. Ainsi que je l'ai expérimenté à plusieurs reprises, cela entraîne des remises en question significatives. Par exemple, dans la méthode de Segner, il n'est pas évident de réaliser une figure Cabri qui marche aussi pour des valeurs négatives ou nulles de la variable et des coefficients du polynôme ! Il faudra inévitablement effectuer un retour réflexif sur les fondements de la géométrie : correspondance entre nombres et grandeurs géométriques, distinction entre propriétés affines et propriétés métriques, intérêt d'une géométrie orientée.

1.3. L'orthogone de Lill

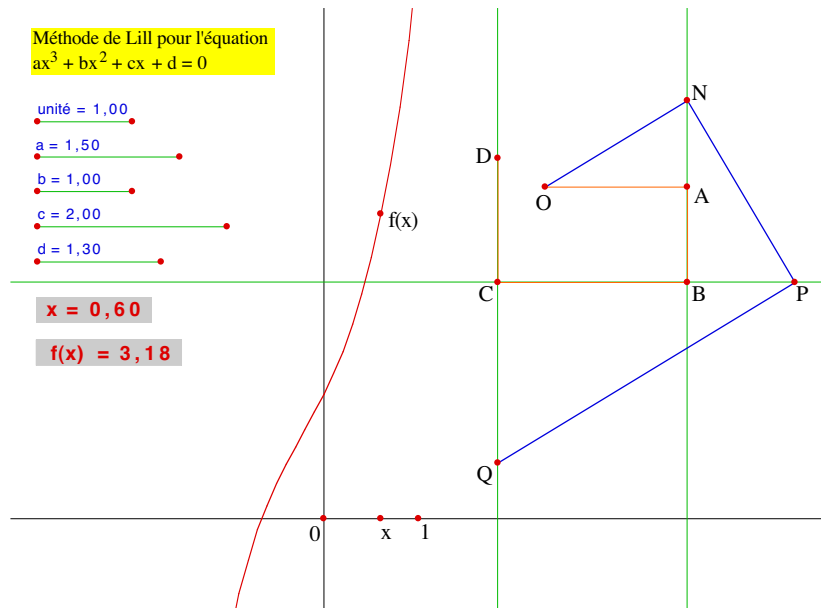
Un capitaine du génie de l'armée autrichienne, Eduard Lill, a publié en 1867 une autre construction de l'équation polynomiale la plus générale, très différente de celle de Segner mais tout aussi simple à réaliser en pratique. Continuons à nous placer, pour fixer les idées, dans le cas du troisième degré.



À partir d'une origine O, on construit une ligne polygonale OABCD à côtés consécutifs perpendiculaires (appelée « orthogone ») telle que $\overline{OA} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{BC} = c$, $\overline{CD} = d$ pour les orientations des côtés successifs indiquées sur la figure ci-contre. On place ensuite les points I et M tels que $\overline{OI} = 1$ et $\overline{MI} = x$. On construit enfin un second orthogone ONPQ comme sur la figure. Les triangles OIM, OAN, NBP et PCQ étant directement semblables, on obtient finalement $\overline{QD} = f(x)$, ainsi que le justifient les égalités suivantes :

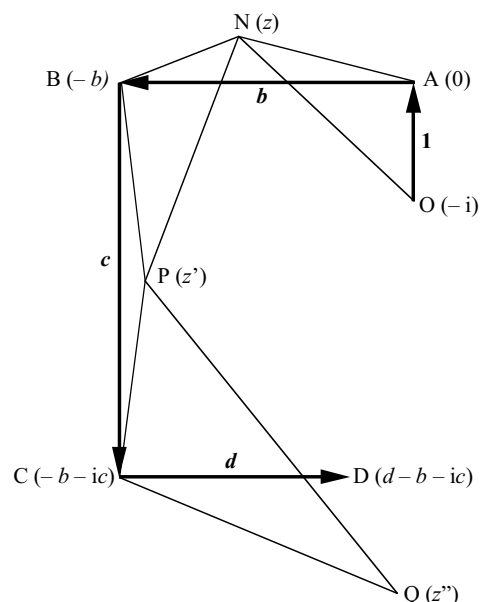
- $\overline{NA} = \overline{OA} \cdot x = ax$;
- $\overline{NB} = \overline{NA} + \overline{AB} = ax + b$;
- $\overline{PB} = \overline{NB} \cdot x = (ax + b)x$;
- $\overline{PC} = \overline{PB} + \overline{BC} = (ax + b)x + c$;
- $\overline{QC} = \overline{PC} \cdot x = ((ax + b)x + c)x$;
- $\overline{QD} = \overline{QC} + \overline{CD} = ((ax + b)x + c)x + d$.

On reconnaît encore l'algorithme de Horner, mais, cette fois, il a été traduit graphiquement par des constructions de perpendiculaires plutôt que de parallèles. Comme pour la méthode de Segner, la résolution de l'équation $f(x) = 0$ se fait soit par tâtonnements (on essaye diverses valeurs de x jusqu'à ce que le point Q coïncide avec le point D), soit par lecture graphique à partir d'une construction par points du graphe de f . Lill, quant à lui, utilisait un transparent finement quadrillé qu'il faisait tourner autour du point O sur l'orthogone OABCD, ce qui lui permettait de suivre de l'œil les côtés successifs de l'orthogone ONPQ sans avoir à le tracer effectivement. Avec Cabri, il est facile de déplacer le point x sur l'axe des abscisses jusqu'à ce que les extrémités des deux orthogones coïncident.



Remarquons que, pour le second degré, la condition de coïncidence des points terminaux des deux orthogones (dans ce cas, P et C) conduit à une construction exacte du point intermédiaire N (comme intersection de la droite (AB) et du cercle de diamètre [OC]) et, par suite, à une construction exacte des racines de l'équation. On retrouve cette construction, avec de nombreuses variantes, dans de nombreux manuels scolaires de Première.

Enfin, pour les élèves de Terminale les plus avancés, on pourra étudier une extension ingénieuse de la méthode permettant aussi la détermination des racines imaginaires : l'idée est de remplacer les triangles rectangles directement semblables par des triangles quelconques.



Sur la figure ci-contre (par rapport à la précédente, pour des raisons de commodité, on a changé le sens de rotation et on a pris a pour unité de longueur), les triangles OAN, NBP et PCQ sont directement semblables. En travaillant dans le plan complexe, avec les affixes marquées sur la figure, traduisons la similitude de ces trois triangles :

$$\frac{z'' + b + ic}{-b - ic - z'} = \frac{z' + b}{-b - z} = \frac{z - 0}{0 + i},$$

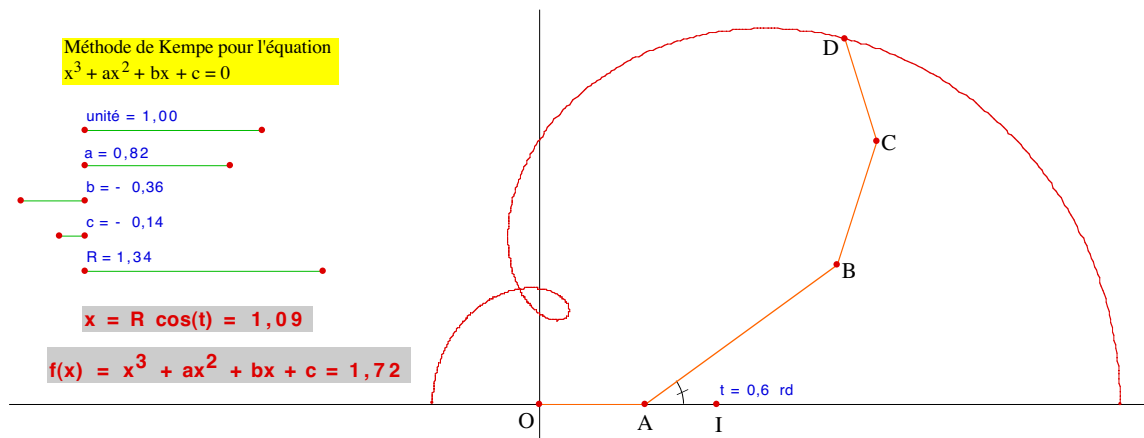
d'où $z'' = -z^3 - bz^2 - cz - b - ic$. On voit alors que l'extrémité de la ligne polygonale ONPQ coïncide avec celle de l'orthogone OABCD lorsque $z'' = d - b - ic$, c'est-à-dire lorsque z est solution de l'équation $z^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Bien entendu, on retrouve les solutions réelles si l'on impose à N de rester sur l'axe réel, c'est-à-dire si le triangle OAN reste rectangle en A.

Il est alors loisible de conduire avec Cabri des expérimentations fructueuses afin, par exemple, de découvrir que les racines non réelles d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées deux à deux.

1.4. Équations algébriques et systèmes articulés

L'Anglais Alfred Bray Kempe a démontré rigoureusement en 1876 ce que Descartes avait pressenti et exposé de manière assez floue, à savoir que les courbes algébriques (celles qui admettent une équation algébrique $P(x, y) = 0$) sont exactement celles qui peuvent être tracées par un système articulé. Voyons comment on peut simuler avec Cabri un système articulé pour construire l'équation $f(x) = 0$, avec $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

On constate qu'en valeur absolue, les racines éventuelles sont majorées par $R = \text{Max}(1, |a| + |b| + |c|)$. En effet, si x est une racine, on a soit $|x| \leq 1$, soit $|x| > 1$ et alors $|x|^3 = |ax^2 + bx + c| \leq |a||x|^2 + |b||x| + |c| \leq (|a| + |b| + |c|)|x|^2$, c'est-à-dire $|x| \leq |a| + |b| + |c|$. En posant $x = R \cos t$, la linéarisation de $f(R \cos t)$ permet de mettre l'équation sous la forme $\frac{aR^2 + 2c}{2} + \frac{3R^3 + 4bR}{4} \cos t + \frac{aR^2}{2} \cos 2t + \frac{R^3}{4} \cos 3t = 0$, c'est-à-dire une écriture du type $l_0 + l_1 \cos t + l_2 \cos 2t + l_3 \cos 3t = 0$. En lui-même, ce calcul constitue un bel exercice de trigonométrie pour des lycéens.



Si l'on fabrique un système articulé avec des barres OA, AB, BC, CD ayant pour longueurs respectives l_0, l_1, l_2, l_3 et astreintes à pivoter de sorte que les angles entre deux barres consécutives soient tous égaux à un même angle t , l'abscisse de l'extrémité D est précisément égale à $l_0 + l_1 \cos t + l_2 \cos 2t + l_3 \cos 3t$. Résoudre l'équation revient donc à trouver les angles $t \in [0, \pi]$ pour lesquels le point D se trouve sur l'axe des ordonnées. Avec Cabri, il suffit de déplacer le point B sur le demi-cercle supérieur de centre A et de rayon l_1 jusqu'à ce que D rencontre cet axe. Si l'on demande le lieu de D quand B varie, les racines correspondent alors aux points d'intersection de ce lieu et de l'axe des ordonnées. On constatera de manière très visuelle (les lieux sont de belles courbes) qu'il y a entre un et trois points d'intersection.

1.5. Les intégrations successives de Massau

Une dernière méthode, imaginée par l'ingénieur belge Junius Massau en 1878, repose sur l'idée toute simple que, pour construire un polynôme de degré n , il suffit d'intégrer n fois sa dérivée n -ième, qui est une constante. Les formules employées pour l'intégration proviennent de la formule de Taylor et sont organisées de manière que la construction de chaque dérivée exploite les points obtenus lors de la construction de la dérivée précédente.

Pour un polynôme du troisième degré $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, après avoir porté sur l'axe

par le trait, les géomètres ont également imaginé de tracer les courbes intégrales d'un trait continu par l'emploi du mouvement tractionnel : après divers instruments expérimentaux réalisés au dix-huitième siècle, des instruments professionnels, appelés « intégraphes », ont été commercialisés et abondamment utilisés par les scientifiques et les ingénieurs à partir de la fin du dix-neuvième siècle.

On peut ainsi facilement soupçonner qu'il y aurait de nombreuses techniques graphiques d'intégration à simuler avec nos logiciels modernes et de nombreuses activités interdisciplinaires à mener en lien avec les sciences physiques et naturelles, l'astronomie, l'économie ou les sciences de l'ingénieur. Faute de place, je vais me contenter d'examiner de près la méthode d'Euler, dans la mesure où elle occupe actuellement une large place dans les programmes de mathématiques et de sciences physiques des classes de Première et de Terminale.

2.1. La méthode d'Euler-Cauchy

Le nouveau programme de Terminale propose d'utiliser la méthode d'Euler pour introduire expérimentalement la fonction exponentielle à partir de l'équation différentielle $y' = y$ et de la condition initiale $y(0) = 1$. L'idée est de discrétiser l'équation en la remplaçant de proche en proche, sur de petits intervalles, par l'équation aux différences finies $\Delta y = y \Delta x$.

Pour calculer $y(x)$, on partage l'intervalle $[0, x]$ en n parties de longueur $\Delta x = \frac{x}{n}$ et on

détermine de proche en proche les valeurs y_k que prend l'intégrale y aux points $x_k = \frac{kx}{n}$,

jusqu'à $y_n = y(x_n) = y(x)$. Sur chaque intervalle, l'équation $\Delta y = y \Delta x$ devient $y_{k+1} - y_k = y_k \Delta x$. Pour approcher y , que l'on ne connaît pas, deux possibilités se présentent : soit on choisit la valeur y_k prise au début de l'intervalle, et on obtient $y_{k+1} - y_k = y_k \Delta x$, c'est-à-dire $y_{k+1} = y_k (1 + \Delta x)$, soit on choisit la valeur y_{k+1} prise à la fin de l'intervalle, ce qui conduit à $y_{k+1} - y_k = y_{k+1} \Delta x$, ou encore à $y_{k+1} = y_k (1 - \Delta x)^{-1}$. Les constructions correspondant à ces deux choix, qui produisent deux lignes polygonales encadrant la vraie courbe, sont appelées respectivement « méthode d'Euler explicite » et « méthode d'Euler implicite ».

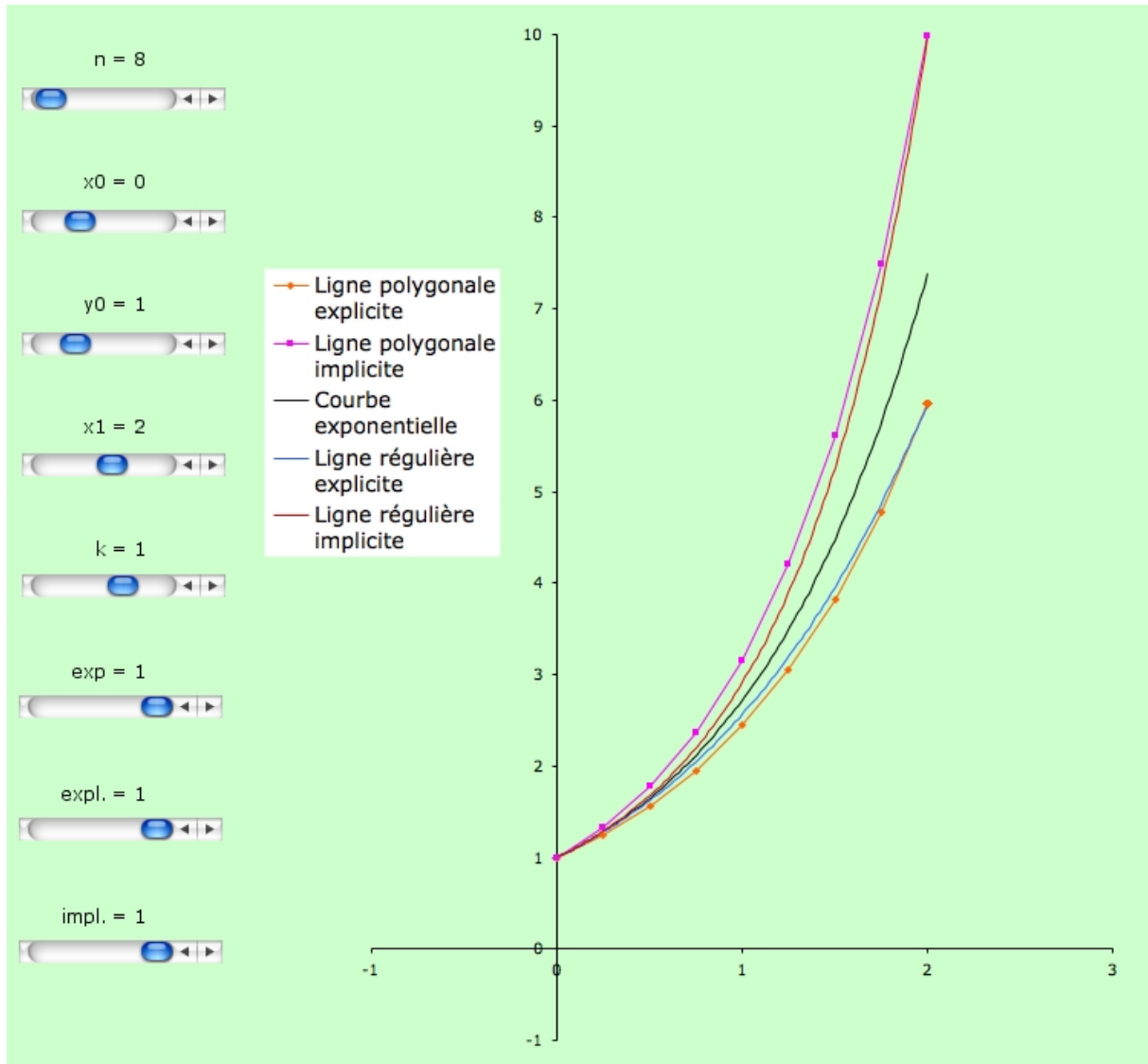
L'itération des calculs entre 0 et x aboutit à $y(x) = y_n = y_0 (1 + \Delta x)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour la méthode

explicite et à $y(x) = y_n = y_0 (1 - \Delta x)^{-n} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$ pour la méthode implicite.

En fait, la vraie méthode d'Euler, telle qu'elle est présentée dans les *Institutiones calculi integralis* de 1768 et telle qu'elle est reprise par Cauchy dans son cours à l'École Polytechnique en 1824, consiste à refaire le calcul précédent pour chaque valeur de x et à encadrer la vraie courbe, non par des lignes polygonales, mais par des courbes régulières : la courbe polynomiale $y = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et la courbe rationnelle $y = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$. Ainsi conçue, la méthode d'approximation s'appelle « méthode d'Euler-Cauchy ».

J'ai rassemblé tous ces éléments, en généralisant un peu, sur une feuille de calcul Excel. Tout d'abord, des curseurs permettent une expérimentation interactive en faisant varier les valeurs initiale et finale, la base de l'exponentielle et le nombre d'intervalles de la subdivision : les élèves observeront que, lorsque le nombre d'intervalles augmente, les deux lignes polygonales se rapprochent, laissant concevoir l'existence d'une fonction qui serait la limite

commune des deux. Dans un second temps, d'autres curseurs, de type logique, font apparaître progressivement les approximations régulières et la vraie courbe exponentielle, ce qui permet d'apprécier la qualité des constructions et de réaliser que les approximations régulières sont meilleures que les approximations polygonales. On peut également prendre conscience qu'en faisant la moyenne des valeurs fournies par les méthodes explicite et implicite, on obtiendrait une approximation incomparablement meilleure.



2.2. Construction des fonctions usuelles

Il est possible, par ailleurs, de réaliser les mêmes constructions avec Cabri : l'avantage est alors d'obtenir les courbes intégrales d'une équation différentielle par des constructions purement géométriques, à la règle et au compas, sans aucun calcul numérique. Par exemple, pour l'équation différentielle $y' = y$, il suffit de préparer une macro fondamentale ayant pour objet initial un point (x_0, y_0) et pour objet finaux une abscisse x_1 et un segment de pente y_0 , d'origine (x_0, y_0) et se terminant sur la droite $x = x_1$. En appliquant n fois cette macro, on construit la ligne polygonale de la méthode d'Euler ; en demandant le lieu du point final de cette ligne polygonale, on obtient la courbe polynomiale de la méthode d'Euler-Cauchy.

En fait, le programme de Première prévoit déjà d'utiliser la méthode d'Euler pour explorer expérimentalement des primitives que l'on ne sait pas calculer. Dans cet esprit, si l'on étudie en Première l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$ avec la condition initiale $y(1) = 0$, il sera

intéressant de constater ensuite en Terminale que les équations aux différences $\Delta y = \frac{\Delta x}{x}$ et $\Delta y = y\Delta x$ sont finalement les mêmes à condition de permuter x et y , ce qui laisse entrevoir que les fonctions logarithme et exponentielle admettent des courbes représentatives symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice.

En s'appuyant toujours sur la méthode d'Euler, on pourra également construire avec Cabri les autres fonctions usuelles du lycée à partir des équations différentielles qui les déterminent. Par exemple, la fonction cosinus est définie par l'équation différentielle $y'' = -y$ et les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$: il suffit donc de construire simultanément avec Cabri les deux courbes définies par $y' = z$, $z' = -y$, $y(0) = 1$ et $z(0) = 0$.

CONCLUSION

La résolution graphique des équations a joué un rôle important, aujourd'hui largement méconnu, dans l'histoire de l'analyse numérique. Au-delà de son intérêt proprement historique, ce thème constitue une source inépuisable d'activités intéressantes à la portée des élèves des lycées : constructions géométriques à l'aide d'instruments variés, fabrication de nouveaux instruments de dessin, tracé de courbes à l'aide de systèmes articulés, simulation des constructions anciennes à l'aide de logiciels de géométrie dynamique et de tableurs, comparaison de procédés de calcul graphique et de procédés de calcul numérique, questions théoriques mêlant géométrie, algèbre et analyse.

Dans cette communication, j'espère avoir fourni aux enseignants de lycée des idées de départ originales pour l'exploitation pédagogique des logiciels de géométrie dynamique et des tableurs, que ce soit pour des illustrations en classe avec un vidéoprojecteur ou pour des travaux pratiques en salle informatique. En particulier, en lien avec des problèmes issus d'autres disciplines, il y aurait peut-être là de quoi inspirer des travaux personnels encadrés substantiels. On remarquera également que l'étude théorique complète de la plupart des résultats que j'ai présentés ne dépasse pas le niveau Terminale et pourrait constituer la trame de travaux dirigés et de problèmes sortant de l'ordinaire.