Le réseau des algébristes anglais et la symbolisation de l'opératoire (1812-54)

Marie-José Durand-Richard

M.C. Paris 8

Chercheur associé REHSEIS-UMR 7596-CNRS

Cette présentation des travaux du groupe de mathématiciens connu sous le nom d'Ecole Algébrique Anglaise [Novy, 1968] reprend les contenus d'un exposé qui a eu lieu lors de la séance inaugurale du séminaire d'histoire des sciences de Paris 8 Vincennes - Saint-Denis, créé en avril 1998 par le groupe de recherche intitulé "Sciences, légitimités, médiations". Elle s'intègre dans un programme de recherche qui vise à saisir comment l'introduction des concepts scientifiques, y compris mathématiques, participe de l'élaboration de significations nouvelles, puisant leur légitimité tant dans l'établissement d'un discours scientifique cohérent, selon des hypothèses et des modalités historiquement datées, que dans les références communes qu'un tel discours partage avec d'autres formes de discours à une époque et en un lieu donnés.

Si les noms de Ch. Babbage (1791-1871), A. de Morgan (1806-71) et G. Boole (1815-64) évoquent quelque acte fondateur chez les logiciens ou informaticiens, John F.W. Herschel (1792-1871) est plutôt reconnu comme astronome[1], et G. Peacock (1791-1858), qui inaugure une conception purement symbolique de l'algèbre, est souvent ignoré. Cette nouvelle voie de recherche, outre qu'elle offre une conception renouvelée de l'algèbre, débouche sur la production de nouveaux objets, matériels ou conceptuels, comme la machine analytique de Babbage, la logique de Boole, voire les quaternions de W.R. Hamilton (1805-65) ou les octavions de A. Cayley (1821-95). Mon souci premier est d'analyser les conditions d'élaboration de ce nouveau regard sur l'algèbre, afin d'éclairer ses spécificités. Je montrerai que ces travaux, tant en mathématiques qu'en logique, participent d'un grand mouvement de rénovation des enseignements traditionnellement dispensés dans les universités de Cambridge et d'Oxford comme fondements de la connaissance, et plus globalement, d'un vaste projet visant à faire de la science un facteur d'unification intellectuelle, dans une société où les institutions traditionnelles ont à faire face à de nouvelles significations de ce qu'est la connaissance, issues de la Révolution Industrielle (1760-1830). J'expliciterai les questions d'ordre philosophique qui se trouvent posées en parallèle à propos de la logique et de l'analyse algébrique, tant en ce qui concerne leurs fondements que leurs conditions de vérité, afin d'examiner si elles peuvent, l'une à Oxford, l'autre à Cambridge, prétendre au statut de science, et servir alors de préalable à toute connaissance ultérieure. Et je montrerai que tant G. Peacock, élaborant une algèbre symbolique en 1833, que George Boole, élaborant une logique symbolique de 1847 à 1854, tentent de résoudre les problèmes posés en utilisant non seulement les travaux mathématiques de leurs contemporains, mais la conception développée par Locke quant aux relations entre les perceptions, les idées et le langage. Mais, convaincue que l'historien fait des choix qui déterminent l'horizon de son propre travail, je préciserai d'abord quelle conception de l'histoire en général conduit la méthodologie de cette recherche en histoire des mathématiques. Elle structure en effet la problématique avec laquelle j'ai abordé l'étude de ce groupe d'algébristes qui, dans la première moitié du 19ème siècle,

[1] Il est lui-même le fils de l'astronome W. Herschel (1738-1822), qui découvrit la planète Uranus en 1781, et il est l'auteur des premières cartes du ciel de l'hémisphère sud, dressées lors de son séjour dans la ville du Cap en Afrique du Sud de 1834 à 1838.

constitue davantage un réseau qu'une école, au sens où une école s'articulerait autour du travail d'un maître et de ses disciples, alors qu'ici, plusieurs mathématiciens vont développer un certain type d'approche formelle dans différents domaines de cette discipline, jusqu'à en renouveler les frontières et les orientations[2].

I. Histoire et histoire des mathématiques

Il est difficile d'associer les termes histoire et mathématiques sans préciser quel rapport est envisagé entre ces deux termes, puisque l'histoire réintroduit à la fois un temps, une société et un sujet que les mathématiques tendent traditionnellement à exclure [Sibony, 1968 ; Salanskis, 1977].

Ce rapport, en effet, n'est ni univoque, ni prédéterminé. Il l'est d'autant moins que plusieurs conceptions de l'histoire sont possibles, qui peuvent trouver leur prolongement en histoire des sciences [Bourdé et Martin, 1983], et dont les plus caractéristiques sont :
- une histoire hagiographique, apologétique, retraçant la vie des "grands hommes", ici celle des savants. Elle offre des repères sécurisants à une certaine quête des origines et de paternités intellectuelles. La légitimité de la science s'y inscrit dans la généalogie de quelques génies, ne devant leurs idées qu'à quelque fulgurance proche de la révélation : ainsi le mythe des trois songes où Descartes (1596-1650) puise l'intuition de sa méthode [Descartes, 1964-74, XX, 179], celui d'un Newton (1642-1727) concevant la gravitation au moment où il reçoit une pomme sur la tête, ou celui de Boole affirmant avoir perçu comme une illumination mystique la possibilité d'écrire les relations logiques sous forme algébrique [MacHale, 1985, 19]. De telles fulgurances, qui font de la création scientifique une affaire individuelle, ne permettent pas d'en appréhender les conditions d'élaboration, tant sur le plan socio-culturel qu'épistémologique. Le sujet, si sujet il y a, y apparait seul face au monde, et non comme acteur d'une société en quête des discours légitimant les pratiques qui la constituent comme telle,
- une histoire évènementielle, fondée sur un exposé chronologique de faits considérés comme indubitables. Sa volonté positiviste d'objectivité suppose comme naturelles deux données qui résultent pourtant d'un travail aujourd'hui reconnu comme le fruit d'une élaboration intellectuelle : d'une part, l'existence d'un temps linéaire et homogène, d'autre part, l'existence de faits en soi, renvoyant à l'existence d'une réalité universelle indubitable. Ce type d'histoire suppose l'historicité de tout événement, et la transparence du monde à la lecture qui en est faite, même si la possibilité s'en trouve rejetée vers un infini temporel. Appliqué à l'histoire des sciences, il souffre souvent d'anachronisme, dans la mesure où il s'offre comme rétrospective, choisissant comme événements des théories sous la forme où elles sont présentement reconnues afin d'en chercher les traces ou les précurseurs dans le passé.
- une histoire socio-culturelle telle qu'elle a été inaugurée par l'Ecole des Annales, et qui se trouve aujourd'hui relayée par une "histoire des représentations" [Chartier, 1998]. Elle tente d'analyser les différentes formes de symbolisation à travers lesquels une société se donne à voir, se reconnait elle-même. Elle situe l'intelligibilité du travail du savant par rapport aux conceptions qui lui sont contemporaines, cherchant à préciser à la fois ce qu'elle apporte et ce qu'elle abandonne, à rendre compte aussi bien "des audaces du pensé que des limites du pensable"[3], ainsi que des ruptures,

---

[2] Je tiens compte ici d'une remarque que m'a faite Ivor Grattan-Guinness, postérieurement à mon intervention d'avril 1998, préférant ce terme de réseau à celui d'école préalablement utilisé par plusieurs mathématiciens ou historiens des mathématiques, notamment Hamilton, 1837 ; Mac Farlane, ; Novy, 1968.
[3] Chartier, 1998, "Histoire intellectuelle et histoire des mentalités".

hésitations et blocages qui accompagnent son objectivation et ses modalités d'appropriation. Elle tend à déconstruire une interprétation des textes qui ne tiendrait compte que de la signification présente des concepts rencontrés, pour les ré-immerger dans le tissu des significations qui sont celles du temps de son élaboration [Simon, 1988]. Ce type d'histoire permet d'intégrer l'histoire des sciences à une histoire qui trop souvent l'ignore.

Plus spécifiquement, il s'agit pour moi de prendre en compte le fait que les mathématiques n'évoluent pas seules, mais dans un contexte où elles proposent un discours de vérité qui, par un effet polysémique inhérent à la langue, rencontre d'autres discours de ce type, d'autres quêtes de symbolisation, avec lesquelles tantôt elles s'accordent, tantôt elles entrent en conflit. C'est ainsi qu'elles peuvent se trouver fonctionner tantôt comme discipline isolée, tantôt comme noyau central d'un vaste travail d'élaboration de significations nouvelles qui les installe non seulement comme référence, mais comme fondement commun d'une rationalisation de pratiques nouvelles.

Cette dernière conception de l'histoire est celle qui rencontre le mieux les préoccupations avec lesquelles j'ai abordé l'histoire des mathématiques, issues de la confrontation entre mon vécu d'enseignante et celui de certains élèves ou amis poussant des cris d'horreur au seul nom de mathématiques. Il m'importait de comprendre pourquoi ces mathématiques que je considérais comme un savoir vivant, voire libérateur, semblait si souvent à d'autres comme un savoir sinon mort, du moins terriblement figé, comme une autorité face à laquelle ils ne pouvaient que se soumettre ou se démettre, et ceci en dépit de la mise en oeuvre d'une pédagogie unissant le plus possible théorie et pratique. Confrontée au retour récurrent du sujet dans les difficultés que manifestent les élèves, les réponses d'ordre politique, sociologique, ou psychologique m'apparaissaient comme réductrices : elles ne rendaient pas compte des glissements de sens ou des changements de registre, portés par le langage, et autour desquels me semblaient s'articuler ces contradictions. C'est ainsi que j'ai voulu aborder l'étude des rapports entre les mathématiques et la loi, afin de comprendre quelles sont les caractéristiques des mathématiques qui les conduisent à être intériorisées comme telle, et à en assurer les fonctions, mais aussi en quoi cette fonction de loi a elle-même un impact sur le mode d'élaboration des concepts et sur la détermination de leur contenu. Une loi que je caractériserais en disant qu'elle veut garantir la possibilité de se situer au-delà des contingences temporelles, qu'elle offre en même temps au pouvoir temporel une légitimité qui permet de transcender les intérêts particuliers de quelques-uns, qu'elle permet à chacun de l'intérioriser comme naturelle et donc de jouer comme référence commune aux différents éléments d'un groupe. A titre d'exemples, je voudrais comprendre ce qui permet à Maurice Béjart de proclamer, au milieu de son spectacle de danse "Stravinski-Wagner" donné en octobre 1995 à Chaillot, de dire que "les mathématiques rapprochent de Dieu", ou à certains psychanalystes d'affirmer que l'ordre symbolique de notre société est un obstacle au fait que les femmes fassent des mathématiques [Lemoine-Luccioni, 1976, 80].

Là où j'en suis de mon travail, je dirais que dans la mesure où les mathématiques ne sauraient se dire sans référence à un discours, elles font partie des activités humaines, et des formes de symbolisation destinées à en assurer la pérennité. Celles-ci ont alors un impact sur les pratiques à venir et sur les futurs modes de théorisation. C'est dans ces échanges entre pratiques et formes de symbolisation que s'effectue le passage des mathématiques comme activité aux mathématiques comme loi. De ce fait, s'il existe une universalité de la science en général, et des mathématiques en particulier, elle fait partie de ce qui s'échange, d'une culture à une autre, des valeurs et des modes d'organisation susceptibles d'être partagés, ou imposés, comme références communes. L'étude des textes mathématiques permet d'éclairer cette dimension du problème. Elle permet de mettre en évidence le fait qu'une analyse purement chronologique de l'apparition des concepts est insuffisante, voire insensée, dans la mesure où ces concepts ne donnent pas à voir une suite de théories bien formées telles que celles qui nous sont transmises à l'école, mais au contraire, une suite de conjectures qui sont mises à l'épreuve de pratiques bien différentes de celles de l'enseignement traditionnel, à savoir celles de la recherche. L'analyse du travail d'élaboration d'objets mathématiques nouveaux nécessite la prise en compte des différents contextes interprétatifs auxquels se réfèrent les concepts ainsi produits.

En ce sens, je ne vois donc rien de réducteur dans le fait de penser les mathématiques comme production humaine, dans la mesure où la production humaine n'est jamais strictement technique ou instrumentale, mais renvoie à ces articulations symboliques qui font de l'humain un être à la recherche d'une construction de sens.

II. Vers la réforme des institutions et des contenus de savoir

Pour qui considère le développement des idées mathématiques comme le progrès naturel de l'abstraction, l'émergence du courant de pensée que constitue le réseau de ces algébristes anglais constitue une véritable surprise. Elle n'est pas le fait de quelque génie mathématique unique ultérieurement reconnu comme tel. Et la situation institutionnelle des mathématiques, alors plus brillante sur le Continent et en France qu'en Grande-Bretagne, permet d'autant moins d'augurer d'un tel renouvellement de perspective à partir de Cambridge que ce sont précisément certaines orientations de recherche issues du Continent, chez J.L. Lagrange (1736-1813), P.S. Laplace (1749-1827) et J. Fourier (1768-1830) en particulier, qui vont servir de ferment à cette réflexion nouvelle, et qui paradoxalement ne donneront pas les mêmes développements dans leur lieu d'origine.

1. La situation des institutions de savoir

La stagnation des mathématiques anglaises, telle qu'elle apparaît dans la critique des institutions insulaires qui se développe au début du XIX^{e} siècle, est aujourd'hui souvent rapportée à la querelle de priorité ayant opposé I. Newton (1642-1727) et G.W. Leibniz (1646-1716) au sujet de l'invention du calcul infinitésimal [Cajory, 19..; Novy', 19.., 187]. En 1712, Leibniz avait en effet été condamné comme plagiaire par une commission réunie spécialement par la Royal Society [Leibniz, 1975], équivalent anglais de l'Académie Royale des Sciences de Paris, et dont Newton était alors le président.

Il n'en est pas de même dans les nombreux articles et ouvrages qui soutiennent alors cette critique, où sont convoqués des facteurs institutionnels et idéologiques plus fondamentaux [Babbage, 1830 ; Kline, 1972, 622]. La Grande-Bretagne est alors le théâtre de vifs débats portant sur la nécessité d'adapter l'enseignement des deux prestigieuses universités d'Oxford et de Cambridge, universités anglicanes qui, avant la création de l'Université de Londres en 1828, et de celle de Durham en 1837, sont alors les deux seules universités anglaises. Leurs statuts, fixés par la reine Elizabeth I en 1570, et renforcés par les lettres royales de Jacques I en 1616, ont résisté aux deux révolutions politiques du XVII^{e} siècle, qui les instituent comme branche de l'Eglise Anglicane, officiellement chargée de la formation du clergé, mais aussi des futures classes gouvernantes. En 1841, Peacock estimera qu'au moins la moitié des étudiants de

Cambridge entrent dans les Ordres, et ce sera encore le cas du tiers d'entre eux de 1850 à 1900 [Peacock, 1841, 166][4]. Ces statuts freinent toute initiative visant à faire évoluer l'institution et les contenus de l'enseignement : chaque directeur de Collège a droit de veto au sein de l'assemblée de l'Université, *The Caput,* et les serments de fidélité à l'Eglise Anglicane qui sont prononcés à tous les échelons de la vie universitaire enferment les individus dans une forme d'auto-culpabilisation qui fait peser un soupçon de parjure sur toute vélléité de changement.

Il y a alors urgence à ce que ces universités intègrent à la fois les nouveaux acquis de la philosophie naturelle développée sur le Continent, et les effets de la Révolution Industrielle. De nouvelles disciplines apparaissent, comme l'économie politique, qu'il s'agit de fonder en raison. Et si Newton a bien affirmé que les principes de la philosophie naturelle sont mathématiques, la nouvelle question désormais posée est de savoir si ces principes sont ceux de la géométrie ou ceux de l'analyse algébrique. La question du renouvellement des formes de savoir traditionnel que sont la logique scolastique enseignée à Oxford, et les mathématiques enseignées à Cambridge, d'ailleurs en compétition, rencontre donc celle des fondements et des conditions de vérité des nouvelles disciplines.

A Cambridge, c'est dans les faits, et non par les institutions, que le "Mathematical Tripos" s'est imposé comme clef de voûte du "Bachelor of Arts degree", après avoir été mis en place dans les années 1725-30 pour des raisons matérielles et provisoires d'impossibilité du déroulement des "disputationes". Avec lui, l'écrit a progressivement acquis la prédominance sur l'oral, l'anglais sur le latin, et les mathématiques sur la logique scolastique. Celles-ci sont devenues la "gloire et l'honneur de l'Université", tout en restant dans une situation paradoxale, puisque cette position d'hégémonie va de pair avec une double fidélité à des mathématiques fondées sur la géométrie, et à la notation fluxionnaire des *Principia* de Newton. Mais une telle crispation tient davantage à l'intégration des mathématiques à un cursus classique tirant sa légitimité du respect des valeurs héritées du passé, qu'à la seule querelle de priorité entre Newton et Leibniz [Durand-Richard, 1996].

A Oxford, l'enseignement est resté fondé sur la logique scolastique. Mais celle-ci n'a pas non plus disparu à Cambridge, où perdurent dans les Collèges, jusqu'en 1839, un examen préalable en latin, les *disputationes* ou*viva voce examination* , où les étudiants ont à soutenir et opposer leurs arguments sous la forme du syllogisme, sur des questions telles que "la doctrine de l'éternité de la faute est-elle inconsistante avec la doctrine de l'omnipotence de Dieu?", ou "la méthode de Newton des "raisons premières et ultimes" est-elle correcte?" [Rouse Ball, 1889, 183].

Si la *Royal Society* prônait une philosophie d'inspiration baconienne au moment de sa création (1662), elle s'est très vite rapprochée de l'aristocratie au pouvoir, en raison même de son statut de libre association, qui l'oblige à chercher des fonds propres du côté du mécénat. Son dynamisme s'est dès lors appauvri du fait de l'augmentation considérable du nombre de ses membres non savants, et des 42 ans de présidence (1778-1820) de J. Banks, lui-même conservateur et propriétaire terrien, qui tente systématiquement d'entraver tout contact entre science et radicalisme.

---

[4] De 1750 à 1799, 60% des étudiants inscrits entrent dans les ordres, 62% de 1800 à 1849, et 38% de 1850 à 1899 [Jenkins & Jones, 1950]. M. McMackin Garland, se référant à ce travail, écrit à tort que "deux-tiers" des étudiants entrent dans les ordres dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle.

Au début du XIX^{e} siècle, les contradictions deviennent manifestes entre l'état des institutions et la situation d'un pays qui passe en quelques décennies, d'une économie essentiellement rurale à une géographie où les ponts, les chemins de fer, les bateaux, les machines-outils affirment partout la naissance d'un pouvoir nouveau, où la production apparaît comme fondamentale. Les débats qui s'engagent sur le rôle des Universités et sur la nature des savoirs fondamentaux visent à ce que les classes gouvernantes se donnent les moyens de les maîtriser.

2. Les nouveaux enjeux au début du XIX^{e} siècle

Face à cette lourdeur institutionnelle se manifeste dans tout le pays, surtout autour des nouveaux centres industriels, un dynamisme et un intérêt pour la science marqués des valeurs de l'utilitarisme. Ils s'appuient sur une culture mathématique développée en Angleterre pendant tout le XVIII^{e} siècle par les *Philomaths* [Pedersen, 1963], dans des journaux destinés à un public non-académique, comme le *Ladies Diary* et le *Mathematical Repository* [Fauvel, Ransom, Wallis, 1991, 8-9; Panteki, 1987, 125], ainsi que dans les académies dissidentes [Rogers, 1981], ou dans les écoles de commerce et de navigation, comme à Newcastle on Tyne, Whitehaven, Durham ou Sanderland [Fauvel, Ransom, Wallis, 1991, 16-19 et 27-32] : une part conséquente de l'enseignement y est accordée au calcul algébrique. De très nombreuses sociétés provinciales voient également le jour, dont la vitalité manifeste un décalage flagrant entre une aristocratie terrienne fidèle à la culture du XVIII^{e} siècle, où la science fait partie des loisirs du gentleman amateur, et les nouvelles élites provinciales - marchands, propriétaires de manufactures, capitalistes, ingénieurs, nouveaux juristes et médecins - en quête d'une légitimation culturelle de leur pouvoir naissant. Conscients que l'inadaptation de l'Université ajoute aux menaces d'explosion sociale qui secouent alors le pays, les scientifiques les plus libéraux vont œuvrer à la recherche d'un nouvel équilibre permettant de dépasser les oppositions entre les "learned men", tenants d'une érudition classique traditionnelle, et les nouveaux "practical men".

Créée en 1802 par l'intelligentsia Whig, *The Edinburgh Review* développe en ce sens une critique radicale des institutions, animée par un état d'esprit utilitariste qui prolonge sur le plan moral la théologie naturelle de William Paley (1743-1805), et qui s'appuie sur les conceptions de John Locke (1632-1704), Dugald Stewart (1753-1828), Jeremy Bentham (1748-1832) et James Mill (1773-1836). En 1808, le Rév. John Playfair (1748-1819), mathématicien et géologiste, y stigmatise l'ignorance dans laquelle se trouvent ses compatriotes à l'égard de la *Mécanique Céleste* de Laplace. Il y insiste massivement sur le fait que la théorie laplacienne, par le biais du calcul leibnizien, confirme totalement la mécanique newtonienne, ouvrant ainsi la possibilité d'une réconciliation entre ces deux formes de développement d'un calcul du mouvement. Il y insiste également sur le fait que le travail de Laplace, loin d'être marqué du signe de l'athéisme, confirme non seulement l'existence d'un Dessein initial d'ordre divin, mais aussi la doctrine des causes finales héritée d'Aristote [Playfair, 1808, 278-79].

Deux ans plus tard, le même Playfair s'attaque dans la même revue aux enseignements traditionnels dans les Universités anglaises, arguant du fait que la fidélité à la logique scolastique exclut le recours à l'expérience et à l'observation, tout comme la curiosité ou l'esprit d'innovation, c'est-à-dire toute démarche expérimentale. Playfair prône le développement d'une science utile aux besoins humains :

What is the main object of most branches of human knowledge, if it be not to minister the bodily wants of man? What is the utility of mathematics, but as they are brought to bear upon navigation, astronomy, mechanics, and so upon bodily wants? What is the object of medecine? what of anatomy? Why greater purposes have law and politics in view, but to consult our bodily wants - to protect those who minister them - and to arrange the conflicting interests and pretentions which these wants occasion? Here is an exact instance of the mischief of verbal studies. One of the greatest objects of human wisdom .. is to turn the properties of matter to the use of man. ... .What was said about the dictates of Aristotle, was not meant to his Physics, but of his Logic and his Metaphysics ... The logic of Aristotle is particularly hostile to inductive sciences. By turning the mind to the syllogistic method, it becomes a very powerful obstruction to that knowledge which is derived, by induction, from experience and observation. [5]

Mais si la critique est véhémente, et s'adresse tout autant à l'Eglise qu'à l'Etat, en raison même de la fonction première des Universités d'Oxford et de Cambridge, elle ne conteste ni la légitimité du pouvoir spirituel, ni celle du pouvoir temporel :

We have no doubt of the truth of the one (our religion) or of the excellence of the other (our government) and are convinced that both will be placed on a firmer basis, in proportion as the minds of men are more trained to the investigation of truth. [6]

D'où que s'énoncent les controverses sur la Réforme de l'Université se trouve ainsi affirmée la primauté nécessaire d'une permanence conçue à la fois comme ordre naturel et stabilité sociale, dont la préservation exige l'urgente symbolisation des transformations qu'implique la Révolution Industrielle. Les universités anglaises vont devoir évoluer du rôle de "seminaries of sound learning and religious education" à celui de "national seminaries". La multitude et la ténacité des actions engagées tout au long du XIX^{e} siècle aboutiront dans les années 1850 à la réforme des statuts de Cambridge et d'Oxford, mais la séparation complète entre l'anglicanisme et l'Université attendra 1871.

3. Les réponses issues de Cambridge

A Cambridge, le groupe de jeunes mathématiciens réunis dès 1812 autour de Babbage, Herschel et Peacock, sous le nom de "The Analytical Society" intervient avec la conviction que l'Université doit sortir de sa léthargie d'institution provinciale pour devenir un pôle national de recherche en mathématiques[7]. La préface remarquablement érudite de l'unique volume de *Memoirs of the Analytical Society,* paru anonymement en 1813, insiste sur la fécondité des plus récents développements de l'analyse algébrique sur le Continent, et s'affirme, par son insistance sur l'origine anglaise de nombreuses idées et sur la nécessité d'en réimporter les acquis [*Memoirs,* 1813, iv], comme un véritable programme de

---

[5] "Quel est le principal objet de la plupart des branches de la connaissance humaine, si ce n'est d'administrer les besoins matériels de l'homme? Quelle est l'utilité des mathématiques, si ce n'est qu'elles sont amenées à porter sur la navigation, l'astronomie, la mécanique, et donc sur les besoins matériels? Quel est l'objet de la médecine? celui de l'anatomie? Quels plus grands projets peuvent avoir la loi et la politique, que de pourvoir à nos besoins matériels - de protéger ceux qui les administrent - et de concilier les intérêts et les prétentions conflictuelles que ces besoins engendrent? L'un des plus grands objets de la sagesse humaine ... est d'utiliser les propriétés de la matière pour l'usage de l'homme."
"Ce qui a été dit des diktats d'Aristote ne s'adressait pas à sa Physique, mais à sa Logique et à sa Métaphysique... La logique d'Aristote est particulièrement hostile aux sciences inductives. En accoutumant l'esprit à la méthode syllogistique, elle devient une obstruction très puissante à cette connaissance qui est obtenue, par induction, à partir de l'observation et de l'expérience". Playfair, Anonyme, 1810, 161, 185.

[6] "Nous n'avons aucun doute sur la vérité de l'une (notre religion) ou l'excellence de l'autre (notre gouvernement), et nous sommes convaincus qu'ils seront tous deux placés sur une base plus ferme, dès lors que l'esprit des hommes sera plus exercé à la recherche de la vérité". Ibid., 179-80.

[7] Herschel refuse que leur société s'appelle "Cambridge" Analytical Society. Royal Society Library, *Herschel Mss,* Hs.2.6 (Herschel à Babbage : 08.02.1813). Durand, *1985,* p. 201.

recherche d'intérêt national. Babbage, Herschel et Peacock traduisent en 1816 le *Traité élémentaire de Calcul Différentiel et Intégral* (1802) de Lacroix, et publient chacun un volume d'exemples en 1820, fournissant aux tuteurs un matériau directement utilisable par les étudiants. Peacock, examinateur en 1817, 19 et 21, pose systématiquement ses questions dans la notation différentielle, qui se trouve ainsi définitivement adoptée au Senate-House Examination. Le trio projette la publication de nombreux manuels visant au renouvellement complet des contenus[8], et Peacock manifeste pour tous ces projets un enthousiasme et une ténacité qui ne l'abandonneront pas :

We are proposing college reforms, which will introduce the true faith in Trinity...[9] *In the meantime, the hall of Saint John's resounds with daily altercations of the deistrs and the dotts. It is wrong symptoms, these of approaching change : for who would have discussed the point five years since.*
Trust me : the golden age of the university is approaching : our business is to accelerate the desirable periode. You mentioned the want of a good Algebra : will you undertake it immediately ? ... But after all, there is as much as want of good treatises upon mechanics, hydrostatics, and optiks, as of other books and all reform will be imperfect which does not attend to these points as well as the others. [10]

Dans ce contexte, cette volonté clairement affirmée de forcer l'adoption de la notation leibnizienne à Cambridge est véritablement un acte politique, constitutif d'un courant de pensée. Si certaines tentatives vont dans le même sens [Panteki, 1987, 124; Wilkes, 1990, 207] depuis le tournant du siècle, aucune ne revêt une telle détermination, que Peacock affirme dès 1817 vouloir soutenir à long terme :

I assure you, my dear Herschel, that I shall never cease to exert myself to the utmost in the cause of reform, and that I will never decline any office which may increase my power to effect it. I am nearly certain of being nominated to the office of Moderator in the year 1818-19, and as I am an examiner in virtue of my office, for the next year, I shall pursue even more decided than hitherto, since I shall feel men have been prepared for the change, and will then be enabled to have acquired a better system by the publication of improved elementary books. I have considerable influence as a lecturer, and I will not neglect it. It is by silent perseverance only that we can hope to reduce the many-headed monster of prejudice, and make the University answer her character as the loving mother of good learning and science.[11]

---

[8] Royal Society Library. *Herschel Mss*, Hs.2.69 (Herschel à Babbage : 24.12.1816), Hs.13.246 (Peacock à Herschel : 13.11.1816), Hs.13.249 (Peacock à Herschel : 17.03.1817), Hs.13.250 (Peacock à Herschel : 30.05.1817). Ces projets n'aboutissent pas, mais signent entre eux une collaboration où s'enracine la genèse du *Traité d'Algèbre* de Peacock. Durand, *1985,* 199.

[9] Il s'agit de la notation différentielle et du Trinity College de Cambridge, celui où sont formés, avec Saint John's College, les meilleurs étudiants en mathématiques.

[10] "Nous proposons actuellement des Réformes pour les Collèges, qui introduiront la vraie foi à Trinity....Pendant ce temps, dans le hall de Saint John's résonnent chaque jour des altercations entre partisans du "d" et du ".". Ce ne sont là que des symptomes, ceux d'un changement imminent : qui aurait en effet abordé cette question il y a cinq ans."
"Croyez-moi : l'âge d'or de l'université approche : notre travail est d'accélérer la période désirable. Vous mentionnez le besoin d'une bonne Algèbre : l'entreprendrez-vous immédiatement?... Mais après tout, il manque tout autant de bons traités de mécanique, d'hydrostatique, et d'optique, comme d'autres livres, et la Réforme sera imparfaite si elle ne traite pas de ces points comme des autres." [Royal Society Library. *Correspondance de Herschel*, Hs.13.247, Peacock à Herschel : 03.12.1816. Durand, 1985, p. 208-16, p. 224-9].

[11] "Je vous assure, mon cher Herschel, que je ne cesserai jamais de me consacrer le plus possible à la cause de la réforme, et que je ne déclinerai jamais aucune tâche qui puisse me permettre d'accroître mon pouvoir de'y parvenir. Je suis presque certain d'être nommé au poste de "Moderator" pour l'année 1818-19, et comme je suis examinateur en vertu de ma fonction pour la nouvelle année, je poursuivrai avec encore plus de détermination, car je verrais ainsi si les étudiants ont été préparés aux changements, et s'ils doivent e^tre initiés à un meilleur système par la publication de meilleurs manuels. J'ai une influence considérable comme "Lecturer", et je ne la négligerai pas. Ce n'est que par la persévérance silencieuse que nous pouvons réduire l'hydre du préjugé, et permettre à l'Université d'être en mesure de répondre à sa vocation de mère protectrice du savoir véritable et de la science". [Royal Society Library : Herschel Papers, Hs.13.249, lettre de Peacock à Herschel du 17.03.1817].

Ces jeunes réformateurs vont ainsi constituer à partir de Cambridge un réseau d'institutions nouvelles chargées de renforcer la représentativité de l'Université, et de développer la recherche et la diffusion dans le domaine de la philosophie naturelle. Ils œuvrent en ce sens au cœur d'un groupe de scientifiques proches des Whigs et des Radicaux, qui contribue activement à la mise en place de nouvelles sociétés savantes entre Cambridge et Londres, afin de rééquilibrer le poids des institutions d'importance nationale, face à la montée des sociétés savantes de province[12]. Il s'agit notamment de la *Cambridge Philosophical Society* (1819), de la *Royal Astronomical Society* (1820), et de la *British Association for the Advancement of Science* (1831), créée sur le modèle de la *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* de Berlin [Babbage, 1829] après l'échec des réformateurs à faire élire Herschel à la présidence de la *Royal Society*. C'est en son sein qu'au cours des décennies 1830-40, la science va se substituer à la philosophie naturelle et réaliser objectivement l'unité idéologique de la bourgeoisie montante et de l'aristocratie au pouvoir : une science où la démarche empirique est intégrée au prix de sa soumission aux sciences déductives, essentiellement mathématiques, et où l'étude des problèmes qui renvoient au social se trouve finalement écartée[13]. En 1841, Peacock publie ses *Observations on the statutes of the University of Cambridge,* qui jouera un rôle déterminant dans la préparation de la réforme [Durand, 1985,] et, de 1852 à 1858, Herschel et lui seront deux des cinq membres de la Commission Royale d'Enquête instituée à Cambridge pour préparer, puis rendre effective, la Réforme de l'Université. Ainsi, le réseau des algébristes anglais se trouve-t-il, pendant toute la première moitié du XIX^e^ siècle, au cœur des intitiatives qui vont contribuer à la dissolution de "l'alliance sacrée" [Gascoigne, 1989,] entre théologie naturelle et philosophie naturelle, et à la recherche de nouvelles valeurs unificatrices qui puisse éviter toute rupture d'ordre social, politique ou culturel.

4. Les réponses issues d'Oxford

Les réponses des logiciens d'Oxford aux critiques de *The Edinburgh Review* sont d'abord portées, dès 1808-09, par le groupe que Pietro Corsi nomme "Les Noétiques d'Oxford", issus d'Oriel College, que Sir James Mackintosh (1765-1832) caractérise comme école de philosophie spéculative, et qui vont réfuter cette condamnation de la logique sur le plan philosophique [Corsi, 1988]. Edward Copleston (1776-1849), Principal de ce collège (1814-26), est l'auteur d'une série de réponses à cette revue, et d'un pamphlet anonyme de 1809, *Examiner Examined*, auquel répondra D. Stewart en 1814 dans le deuxième volume de ses *Elements of the Philosophy of the Human Mind.*

Si les Noétiques d'Oxford sont favorables à l'introduction de certains enseignements nouveaux à l'université, c'est seulement à titre optionnel, et à condition qu'ils puissent être intégrés à l'épistémologie induite par la logique scolastique. C'est notamment le cas pour l'économie politique, que Copleston et Richard Whately (1787-1863) Fellow à Oriel College, puis archevêque de Dublin à partir de 1831, introduisent à Oxford et vont largement contribuer à installer

---

[12] W.F. Cannon considère que Babbage, Herschel et Peacock constituent le cœur même d'un groupe qu'il qualifie de "Cambridge network", tandis que J. Morrell et A. Thackeray, analysant les activités de la *British Association for the Advancement of Science* dans les décennies qui suivent sa création, les situent au sein d'un groupe formé des organisateurs de ces nombreuses sociétés savantes d'importance nationale, et qu'il qualifie de *Gentlemen of Science*.

[13] C'est en 1833 à Cambridge que Whewell, qui préside le 3ème Congrès de l'Association, forge le terme"scientist" pour désigner les participants à cette espèce "d'église nationale de l'intellect", telle que la définit S.T. Coleridge. Morrell et Thackray, 1981, 192-34, 256-75.

à l'Université ainsi que dans les cercles anglicans[14], dans une perspective visant à la présenter dans le cadre de la théologie naturelle de Paley. Le traité de logique de Whately, qui servira de manuel de référence à Boole au moment de sa rédaction de *Mathematical Analysis of Logic,* est précisément élaboré à cet effet, et constitue une entreprise collective des Noétiques d'Oxford : Copleston en a confié la rédaction, ainsi que certaines de ses notes, à Whately ; Whately sous-traite la rédaction de certaines parties à John Henry Newman (1801-90) et à Nassau William Senior (1790-1864), premier professeur d'économie politique à Oxford (1825-30). Dans sa version de 1826, l'ouvrage contient d'ailleurs en appendice un texte de Nassau Senior sur l'analyse des termes de l'économie politique, imprégné des indications fournies par D. Stewart sur le rôle du langage dans la science. Mais surtout, cette logique est un ouvrage préparé pour l'*Encyclopædia Metropolitana* de Samuel Coleridge (1772-1834) qui s'oppose à la spécialisation des sciences, considérée comme une menace de laïcisation et de plébéisation. A cette fin, il en appelle à la constitution d'un corps de théologiens, érudits et hommes de science, afin de préparer un ouvrage offrant, non pas une présentation alphabétique, mais l'exposé rationnel d'un système philosophique fondé sur la nature des sujets abordés, ainsi que sur la genèse et l'harmonie des connaissances humaines [Yeo, 1993, 44, 51]. S'ils s'opposent à D. Stewart quant à son rejet de la logique scolastique, les Noétiques d'Oxford se rangent à ses côtés pour défendre la philosophie de l'esprit humain contre utilitaristes et praticiens pour lesquels elle est inutile pour l'avancement de la connaissance et le bonheur humain.

Les débats dans *The Edinburgh Review* vont connaître un deuxième moment fort dans les années 1830, notamment avec les critiques du philosophe et logicien écossais William Hamilton (1788-1856), formé à Oxford - à ne pas confondre avec l'inventeur des quaternions - contre le philosophe et mathématicien de Cambridge, William Whewell (1794-1866), avec lequel il s'oppose sur deux points fondamentaux :

- au sujet de la nécessité d'une réforme des universités, Hamilton soutenant l'Université contre les Collèges [Hamilton, 1831], Whewell les Collèges contre l'Université,
- au sujet du fondement des connaissances humaines, dans ce qu'ils conçoivent être les principes d'une éducation libérale, Hamilton soutenant la prééminence de la logique [Hamilton, 1833], et Whewell celle d'une forme permanente des mathématiques, à savoir la géométrie [Hamilton, 1836], par opposition à sa forme progressive, à savoir l'analyse algébrique.

Cette recherche de ce qui doit constituer les formes permanentes des institutions et de la connaissance, ces interrogations relatives à la nature de leurs fondements, conduisent parallèlement à envisager une restructuration des mathématiques à Cambridge, et une restructuration de la logique, qui s'exprime dans le mouvement que W. Hamilton, se référant aux *Analytiques* d'Aristote, a appelé la "nouvelle analytique" [Diagne, 1989, 97-110], dont il qualifie l'émergence de véritable miracle, eu égard à l'état de dégénérescence mortelle dans lequel il perçoit l'enseignement de la logique à Oxford [Hamilton, 1833].

III. Caractérisation inductive ou déductive des nouvelles sciences

La question épistémologique cruciale qui se trouve abordée dans les débats portant sur des corpus tels que l'analyse algébrique ou l'économie politique est celle de comprendre d'où provient la cohérence du raisonnement auquel elles

---

[14] Whately donnera des *Introductory Lectures on Political Economy* à Oxford en 1831.

donnent lieu, et la vérité de leurs assertions. Les hypothèses qui les fondent, et la rigueur logique se trouvent ainsi réinterrogées bien avant que W. Whewell ne publie son *Histoire* (1837) et sa *Philosophie* (1840)*des Sciences Inductives*. Ces débats vont conduire à une exploration systématique des rôles de l'expérience et de la déduction dans l'élaboration des conditions de certitude de ces sciences, ainsi que des notions de vérité et de consistance.

1. Dugald Stewart et la vérité démonstrative

Dès le début du XIX^{e} siècle, D. Stewart, que Babbage rencontrera dès 1819 au moment où il entreprendra sa visite détaillée et approfondie des manufactures pour préparer son ouvrage de 1832, *On the Economy of Machinery and Manufactures*, s'emploie à préciser la distinction entre les mathématiques et les autres sciences. Dans ses *Elements of Philosophy of Human Mind,* son analyse de la certitude mathématique s'appuie sur la conception de la vérité démonstrative développée par John Locke (1632-1704), et selon laquelle, pour les objets mathématiques, existence nominale et existence réelle se trouvent confondues [Locke, 1694, IV-6-13, IV-6-16, IV-12-4 ; Durand, 1990]. Il se livre à une critique de Leibniz et de Condillac avant de réaffirmer avec Locke qu'en mathématiques, la certitude des résultats est fondée sur le fait que la définition de ses objets coïncide avec leur existence. Dans ces conditions, la certitude mathématique n'est pas vérité, mais consistance.

In these extracts from Leibnitz, as well as in that quoted from Condillac, in the beginning of this article, the essential distinction between mathematics and the other sciences, in point of phraseology, is entirely overlooked. In the former science, where the use of an ambiguous word is impossible, it may be easily conceived how the solution of a problem may be reduced to something resembling the operation of a mill, - the conditions of the problem, when once translated from the common language into that of algebra, disappearing entirely form the view; and the subsequent process being almost mechanically regulated by general rules, till the final result is obtained. In the latter, the whole of the words about which our reasonings are conversant, admit, more or less, of different shades of meaning; and it is only by considering attentively the relation in which they stand to the immediate context, that the precise idea of the author in any particular instance is to be ascertained. In those sciences, accordingly, the constant and unremitting exercise of the attention is indispensably necessary, to prevent us, at every step of our progress, from going astray.[15]

Dans les autres sciences, toujours pour Stewart, l'expérience et l'induction ne sont cependant pas des actes aussi naïfs que les concevaient Francis Bacon (1561-1626) et ses successeurs. Les "matters of fact" sont des données que l'on sélectionne, et, comme l'affirmait déjà Locke, elles ne recouvrent pas toutes les caractéristiques de la chose examinée. En l'absence de théorie, ou de principes généraux inférés d'une comparaison discriminante des différents phénomènes, l'expérience n'est rien d'autre qu'un guide aveugle et inutile [Stewert, 1814, 329]. Tout acte d'observation suppose une interprétation de la nature. Tout acte d'induction s'appuie sur quelque croyance fondamentale en l'uniformité et la constance des lois de la nature. Aucune étude d'un phénomène naturel ne peut être entreprise sans user, consciemment

[15] "Dans ces extraits de Leibniz, aussi bien que dans ceux issus de Condillac au début de cet article, la distinction essentielle entre les mathématiques et les autres sciences, du point de vue du vocabulaire, est entièrement négligée. Dans les premières de ces sciences, où l'usage d'un mot ambigu est impossible, on peut facilement concevoir comment la solution d'un problème peut être réduite à quelque chose qui ressemble à l'opération d'une machine, - les conditions du problème, une fois traduites du langage commun en celui de l'algèbre, disparaissent complètement de la perspective ; et le procès qui s'ensuit est presque mécaniquement régulé par des règles générales, jusqu'à ce que le résultat final soit obtenu. Dans les dernières de ces sciences, tous les mots sur lesquels portent nos raisonnements admettent, plus ou moins, différentes formes de signification ; et c'est seulement en examinant attentivement la relation trouvent avec leur contexte immédiat, que l'idée précise de l'auteur peut être assurée dans chaque cas particulier. Par conséquent, dans ces sciences, l'exercice constant et ininterrompu de l'attention est indispensablement nécessaire pour nous empêcher, à chaque étape du procès, de nous égarer." [Stewart 1814, 141).

ou inconsciemment, des principes du raisonnement qui organisent les activités de l'esprit humain. Et l'étude de ces principes est aussi essentielle au développement des sciences que celle de l'objet de chaque discipline scientifique.

2. Whately et la caractérisation des opérations

Outre son rôle de référence dans le travail de Boole[16], la logique de Whately est un texte important pour cette perspective visant à fonder les lois de la pensée sur une philosophie de l'esprit. On peut déjà y lire certains rapprochements qui se produisent entre philosophie de la logique et philosophie des mathématiques, et ceci au-delà des oppositions entre Oxford et Cambridge. Whately examine en effet la logique d'un point de vue qui est influencé à la fois par la pratique de l'arithmétique et par la conception de Locke relative à la distanciation entre réalité et connaissance.

Whately caractérise la logique à la fois comme une science, en ce qu'elle analyse les processus de l'esprit, et comme un art, en ce qu'elle énonce des règles pratiques pour garantir l'esprit contre l'erreur dans les déductions. Les difficultés pour apprécier correctement le rôle de la logique dans la découverte scientifique proviennent, selon lui, d'une erreur d'appréciation des rôles respectifs de l'observation et de l'expérience d'une part, et de l'opération de raisonnement d'autre part. Elles ne tiennent pas à la logique, mais au choix des données sur lesquelles on l'applique, de même que l'arithmétique ne donne un résultat correct à un problème que si les données elles-mêmes le sont.[17]

Whately distingue alors trois opérations de l'esprit : l'appréhension, qui permet de concevoir un objet dans l'esprit, le jugement, qui permet la comparaison, et le raisonnement, qui permet de procéder à un tel jugement. Dans le langage, chacun des actes de ces trois opérations s'exprime respectivement par un terme, une proposition et un syllogisme. Cette expression de l'acte de raisonnement qu'est le syllogisme est alors conçu comme principe universel du raisonnement et comme la forme réduite de tout raisonnement correct [Whately, 1849, 23-24]. Les syllogismes portent sur des classes d'objets qui résultent d'une généralisation, et cette généralisation résulte elle-même d'une abstraction qui permet de ne retenir que ce qui est essentiel au raisonnement. Mais Whately ne l'interroge ni au-delà de sa fonction de séparation, ni au-delà de sa fonction de caractérisation de l'esprit humain ; s'il suit les traces de Locke lorsqu'il utilise comme lui la séparation entre la réalité, les idées et les mots, il s'en éloigne lorsqu'il articule son analyse des idées à partir de l'esprit, et non à partir des perceptions.

Ayant ainsi caractérisé l'objet de la logique, Whately insiste de fait sur son caractère formel, fondé sur l'utilisation de symboles arbitraires dépourvus de signification [Whately, 1849, 29], et qui offrent de ce fait les mêmes avantages que les symboles de l'arithmétique : le raisonnement est indépendant de la vérité et de la fausseté des conclusions, qui sont accidentelles et variables. Et Whately poursuit l'analogie entre ces deux sciences, utilisant de fait la pratique de l'arithmétique qu'est censé avoir le lecteur pour préciser sa propre conception de la logique. Il va plus loin en précisant que l'analyse de la similitude des procédures ainsi repérés permet de s'apercevoir qu'il s'agit là d'une seule et même logique.

---

[16] Cf. p. 11.
[17] Whately approuve Bacon de faire remonter cette confusion aux scolastiques qui ont, les premiers, tenté d'utiliser la logique dans les découvertes physiques.

S'agissant alors de traiter l'induction dans le cadre de la logique aristotélicienne, Whately reprend la distinction de Locke entre définition réelle et définition nominale, précisant comme Locke qu'en mathématiques, définition réelle et définition nominale coïncident, et affirmant que la logique ne traite que des définitions nominales [Whately, 1849, 29-31]. Il peut ainsi d'une part, traiter de l'induction dans le cadre de la logique en ramenant l'argument inductif à un syllogisme en Barbara, et d'autre part, distinguer entre découvertes logiques et découvertes physiques. La découverte de vérités nouvelles ne saurait provenir du seul raisonnement, puisque la conclusion est contenue dans les prémisses, sauf à dire qu'elle n'est nouvelle que parce qu'elle n'a jamais été exprimée. Et de conclure que les découvertes mathématiques sont des découvertes logiques.

3. Hamilton et les lois de la pensée

Le courant que Hamilton qualifie de "Nouvelle Analytique" est fondé sur la quantification du prédicat, proposée pour la première fois par George Bentham[18] (1800-84) en 1827 dans *Outline of a New System of Logic with a Critical Exmination of Dr Whately's 'Elements of Logic'*, et sur la notion d'univers du discours, dégagée par de Morgan dans sa *Formal Logic* de 1847. La première de ces notions va conduire à l'écriture équationnelle de la proposition, et la seconde à une meilleure explicitation des propriétés formelles de la copule du prédicat, et de la négation d'une proposition.

Hamilton participe à ce mouvement, non seulement sur le plan technique, à propos de la quantification du prédicat, mais sur le plan philosophique, en analysant les conséquences de ce qu'il perçoit comme une conception instrumentaliste de la logique, et qu'il voit émerger dans ces débats.

Il s'appuie à la fois sur la logique scolastique et la philosophie de Kant pour affirmer avec Whately que la logique n'est ni une science "matérielle", ni une science "réelle", mais une science "formelle". De ce fait, pour Hamilton, la logique se préoccupe non pas de la question de la "vérité", de la "fausseté" ou de la "modalité" des propositions en elles-mêmes, mais exclusivement de la question de leur "non-contradiction".

Logic is a formal science; it takes no consideration of real existence, or of its relations, but is occupied solely about that existence and those relations which arise through, and are regulated by, the conditions of thought itself. Of the truth or falsehood of propositions, in themselves, it knows nothing, and takes no account: all in logic may be held true that is not conceived as contradictory. In reasoning, logic guarantees neither the premisses nor the conclusion, but merely the consequence of the latter from the former. ...
But if truth or falsehood, as a material quality of propositions and syllogisms is extralogical, so also is their modality. Necessity, Possibility, &c., are circumstances which do not affect the logical copula or the logical inference. They do not relate to the connexion of the subject and predicate of the antecedent and consequent, as terms in thought, but as realities in existence; they are metaphysical, not logical conditions. The syllogistic inference is always necessary; it is modified by no extraformal condition; is equally apodictic in contingent as in necessary matter.[19]

[18] George Bentham, botaniste, est le neveu de Jeremy Bentham (1748-1832), philosophe, fondateur de l'utilitarisme, et inventeur du panopticon analysé par Michel Foucault, 1975, *Surveiller et Punir.,* Paris, Gallimard. Hamilton connait cet ouvrage de G. Bentham, qui fait partie de ceux dont il fait le compte-rendu en 1833, mais il ne s'y réfère pas. Il est donc d'autant plus étonnant de le voir entamer une querelle de priorié contre De Morgan en 1847 à ce sujet.

[19] "La logique est une science formelle ; elle ne considère aucunement l'existence réelle, ou ses relations ; elle n'est concernée que par l'existence et les relations qui proviennent et sont gouvernées par les conditions de la pensée elle-même. De la vérité ou de la fausseté des propositions elles-mêmes, elle ne sait rien, et n'en tient aucun compte : en

Hamilton insiste ainsi sur les confusions introduites en logique par ce qu'il considère comme des notions métaphysiques : le nécessaire, l'impossible, le contingent, le possible, le vrai, le faux, dont traitait déjà Aristote dans *De l'interprétation,* mais aussi le certain, le probable, l'utile, le bon, le juste, puisqu'une telle liste peut être prolongée à volonté. Sa préoccupation essentielle est donc de délimiter le champ de la logique conçue comme science formelle, c'est-à-dire comme une science première et indépendante, et à en exlure radicalement le problème de la vérité, puisque "celui qui raisonne doit transcender la sphère de la logique s'il veut tenter de revendiquer la vérité de sa conclusion". Hamilton peut ainsi utiliser sa conception formelle de la logique pour l'exclure du choix des axiomes et de tout ce qui concerne l'invention scientifique.

Cette stricte caractérisation de la logique comme science formelle conduit Hamilton à corriger l'analyse du syllogisme inductif proposée par Whately. Il réaffirme que la logique ne considère pas réellement des choses existantes, mais "les formes générales de la pensée telles que l'esprit les conçoit". Il distingue alors entre la relation de causalité, qui concerne les choses existantes, et la relation entre raison et conséquence, qui est une relation entre le tout et ses parties, grâce à laquelle il analyse l'induction logique. Le tout et ses parties n'ont aucune existence réelle ou essentielle, ce sont des "créations de l'esprit lui-même". De cette manière, Hamilton peut concevoir le raisonnement déductif comme relevant de l'analyse, qui permet de passer du tout à ses parties, et le raisonnement inductif comme relevant de la synthèse, qui permet de passer des parties au tout [Hamilton, 1833, 226-27]

Mais Hamilton se démarque beaucoup plus radicalement encore de Whately en réaffirmant que l'objet premier de la logique n'est pas le processus du raisonnement, mais l'analyse des lois de la pensée. Il s'oppose résolument à toute conception instrumentaliste de la logique, se démarquant constamment de Locke et de ses confusions entre logique, psychologie et métaphysique, et lui imputant le déclin de la logique en Angleterre. Il reproche tout d'abord à Whately de réduire la logique à l'étude du seul syllogisme, rejetant celle de l'appréhension et du jugement que Hamilton considère comme des lois constitutives de la pensée ; et de réduire du même coup l'analyse du raisonnement à l'analyse du langage.

We conceive as a very partial conception of the science, - that Dr Whately makes the process of reasoning not merely its principal, but even its adequate object; those of simple apprehension and judgment being considered not in themselves as constituent elements of thought, but simply as subordinate to argumentation. In this view logic is made convertible with syllogistic. [20]

---

logique, tout ce qui n'est pas conçu comme contradictoire peut être tenu pour vrai. Dans le raisonnement, ni les prémisses ni la conclusion, mais seulement le fait que celle-ci soit la conséquence de celles-là ..."
"Mais si la vérité ou la fausseté, en tant que qualité matérielle des propositions et des syllogismes, est extra-logique, il en est de même de leurs modalités. La Nécessité, la Possibilité, etc., ne sont que des circonstances qui n'affectent pas la copule logique ou l'inférence logique. Elles ne sont pas relatives à la connexion entre le sujet et le prédicat, entre l'antécédent et le conséquent, elles n'interviennent pas comme termes de pensée, mais comme des réalités en existence : ce sont des conditions non pas logiques, mais métaphysiques. L'inférence logique est toujours nécessaire ; elle n'est modifiée pas aucune condition extra-formelle ; elle est apodictique en ce qui concerne aussi bien le contingent que le nécessaire." [Hamilton, 1833, 215-16].

[20] "Nous considérons comme une *conception* très partielle de la science - cette conception du Dr Whately qui considère le procès de *raisonnement* comme son objet non seulement principal, mais adéquat, et qui situe le processus de la simple appréhension et celui du jugement, non pas en eux-mêmes comme éléments constituants de la pensée, mais simplement comme subordonnés à l'argumentation. De ce point de vue, la logique devient convertible avec la syllogisitique." [Hamilton, 1833, 206].

Le caractère formel de la logique constitue précisément pour Whately "la qualité discriminante" qui la rend distincte de la psychologie et de la métaphysique, qui ont elles aussi pour objet "les opérations de l'esprit", mais qui en traitent dans "leur nature réelle" :

Other sciences, as psychology and metaphysic, propose for their object (among the other faculties) the operations of reasoning, but this considered in its real nature : logic, on the contrary, has the same for its object, but only in its formal capacity ; in fact, it has, in propriety of speech, nothing to do with the process of operation, but is conversant only with its laws."[21]

C'est sur ce point précis que portent les difficultés du débat, qui s'enracinent autour du triple usage que faisait Locke du terme "opération" conçue comme opération de l'esprit :

- la faculté de l'esprit qu'est l'opération en puissance, sa potentialité conçue comme faculté d'agir,
- la mise en acte de cette faculté qui correspond au processus opératoire proprement dit,
- et sa réalisation effective, l'action produite ou le résultat de cette opération.

C'est là une distinction cruciale, et c'est la séparation entre ces trois acceptions qui est à l'œuvre dans ces débats. C'est elle qui conduira les algébristes anglais, ainsi que Boole, à expliciter les opérations comme des lois de combinaison, et à les définir, non plus relativement à l'obtention de leurs résultats, mais à partir de leurs propriétés. Whately amorce déjà cette séparation, et c'est précisément sur ce point que Hamilton s'oppose à lui, refusant le caractère instrumental que pourrait prendre la logique si son objet était limité à l'étude des processus opératoires. Hamilton opte pour une caractérisation de la logique comme étude des concepts qui résultent des opérations de l'esprit, qui en sont le résultat.

Logic considers Thought, not as the operation of thinking, but as its product; it does not treat of Conception, Judgment, and Reasoning, but of Concepts, Judgments, and Reasonings.... Whately, I have already shown you, among other errors in his determination of the object-matter of Logic, confounds or reverses this; for he proposes to Logic, not thought considered as a product, but reasoning alone; and that, too, considered as a producing operation. He thus confounds Logic with Phaenomenal Psychology. [22]

C'est précisément ce même rejet de l'instrumentalisme qui permet à Hamilton de rejoindre Whewell dans sa critique de l'automatisme des procédures algébriques, et dans sa conception de l'éducation libérale, que tous deux opposent à la soumission de l'individu à des intérêts nationaux ou professionnels [Hamilton, 1836 (1852), 261-62]. S'ils s'accordent sur le fond, Whewell et Hamilton divergent néanmoins quant aux moyens d'y parvenir : Hamilton défend l'Université là où Whewell soutient les Collèges ; chacun reste fidèle à la forme traditionnelle des fondements du savoir telle qu'il l'a lui-même reçue : la logique pour Hamilton formé à Oxford, la géométrie pour Whewell formé à Cambridge.

---

[21] "D'autres sciences, comme la psychologie et la métaphysique, se donnent comme objets (parmi d'autres facultés) les opérations de raisonnement, mais considérées dans leur nature réelle : la logique, au contraire, a pour objet les mêmes opérations de raisonnement, mais seulement dans leur capacité formelle ; en fait, elle n'a, à proprement parler, rien à voir avec le processus de l'opération mais ne se préoccupe que de ses lois." [Hamilton, 1833, 207].

[22] "La Logique considère la Pensée, non pas comme l'opération de penser, mais comme son produit; elle ne traite pas de la Conception, du Jugement, et du Raisonnement, mais des Concepts, des Jugements, et des Raisonnements.... Whately, ... , parmi d'autres erreurs dans sa détermination de l'objet de la Logique, confond ou inverse ces deux aspects; car il propose à la Logique, non pas la pensée considérée comme un produit, mais seulement le raisonnement, lui-même considéré en tant qu'opération productrice. Il confond ainsi la Logique avec la Psychologie des Phénomènes." [Hamilton, 1860, vol. III, lecture V, part I, section I : "Noetic : On the fundamental laws of thought. Their contents and history", 73-74].

Ces débats relatifs au statut de la logique permettent donc de mettre en avant trois caractéristiques fondamentales : l'affirmation du caractère purement formel de la logique, la distinction entre vérité et consistance, entre cohérence logique et causalité physique, et la séparation entre les trois acceptions du terme "opération".

IV. Du réalisme mathématique au symbolisme opératoire

Les mathématiques sont elles aussi guettées par ce même danger d'instrumentalisation. Dans la mesure même où les développements de l'écriture algébrique permettent d'échapper à la préoccupation constante de la signification des objets du calcul, elles s'autorisent à opérer sur les objets qui ne correspondent plus aux définitions initiales des opérations, issues de l'arithmétique. C'est précisément le cas des calculs alors pratiqués sur les quantités négatives, voire impossibles, et plus récemment encore sur les opérateurs différentiels. Les mathématiques se trouvent ainsi menacées à la fois dans leur signification et dans leur rigueur démonstrative.

1. Les nouveaux objets du calcul algébrique

Avant la fin du XVIII^{e} siècle, le même J. Playfair qui stigmatisera l'ignorance qu'avaient ses compatriotes de la *Mécanique Céleste* de Laplace, analyse en ces termes les difficultés conceptuelles issues de l'introduction de quantités impossibles dans les calculs.

Those expressions, as is well known, owe their origin to a contradiction taking place in that combination of ideas which they were intended to denote. Thus, if it be required to divide the given line AB=a in C, so that AC x CB may be equal to a given space b^2 *, and if AC=x, then* $x=\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ *; which value of x is imaginary when* b^2 *is greater than* $\frac{1}{4}a^2$ *; now to suppose that* b^2 *is greater than* $\frac{1}{4}a^2$ *, is to suppose that the rectangle AC x CB is greater than the square of half the line AB, which is impossible. ...*
The natural office of imaginary expressions is therefore, to point out when the conditions, from which a general formula is derived, become inconsistent with each other. [23]

Ainsi dépourvues d'intelligibilité, ces expressions imaginaires devraient être dépourvues d'utilité, ce qui est pourtant loin d'être le cas. Comme bon nombre de ses contemporains, Playfair tente donc de leur trouver une légitimité grâce à des analogies avec la géométrie. Il développe l'exemple de l'intégration de deux équations diférentielles $\dot{a} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1+z^2}}$ et $\dot{a} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1-z^2}}$, qui peuvent être ramenées à une forme commune si, dans la seconde, on remplace z par $z\sqrt{-1}$. La

[23] "Ces expressions, comme on le sait fort bien, doivent leur origine à une contradiction qui intervient dans cette combinaison des idées qu'elles sont censées représenter. Ainsi, qu'il soit requis de diviser la ligne donnée AB=a en C, de telle sorte AC x CB puisse être égale à un espace donné b^2 , et si AC=x, alors $x=\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$; valeur de x qui est imaginaire quand b^2 est plus grand que $\frac{1}{4}a^2$; mais supposer que b^2 est plus grand que $\frac{1}{4}a^2$, c'est supposer que le rectangle AC x CB est plus grand que le carré de la moitié de la ligne AB, ce qui est impossible...."
"La fonction naturelle des expressions imaginaires est donc de montrer que les conditions, à partir desquelles une formule générale est dérivée [déduite], deviennent inconsistantes les unes par rapport aux autres." [Playfair, 1778, 319-20].

première a pour solution z = sh a, dont l'expression en fonction de l'exponentielle ne fait pas intervenir d'expressions imaginaires, puisque sh a = $\frac{e^{a} - e^{-a}}{2}$. La seconde a pour solution z = sin a, dont l'expression en fonction de l'exponentielle est une expression imaginaire, puisque sin a = $\frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$. Playfair réfère cette analogie d'écriture à une analogie de nature géométrique, entre un arc d'hyperbole équilatère de longueur a, et un arc de cercle de même longueur, dont les propriétés se correspondent par l'affinité entre ces deux courbes géométriques.

Ainsi, Playfair n'attribue aux résultats obtenus grâce aux quantités impossibles qu'une valeur heuristique. Le raisonnement reste pour lui l'apanage de la géométrie, où la signification des propositions n'est pas seulement contenue dans la logique du raisonnement, mais où les figures interviennent comme référence signifiante, permettant de contrôler chaque étape du raisonnement. Au contraire, les symboles algébriques sont des caractères artificiels qui perdent tout lien avec l'idée qu'ils représentent et donnent lieu à des opérations aveugles et mécaniques [Playfair, 1778, 321].

Les développements de l'analyse algébrique offrent un autre exemple, tout aussi important, de calculs susceptibles d'être pratiqués sur des symboles dépourvus de signification et qui posent très directement la question du rôle de l'analogie dans le raisonnement mathématique. Le théorème de Lagrange, que les successeurs de Peacock appelleront "forme symbolique du théorème de Taylor"[Greatheed, 1837 ; Gregory, 1840 ; Durand, 1995, 133], est issu d'une manipulation analogique de deux développements de fonctions en série : d'une part, celui d'une fonction en série de Taylor :

$$u(z+x) = u(z) + \frac{du}{dz}\,x + \frac{d^2u}{dz^2}\,\frac{x^2}{2!} + \frac{d^3u}{dz^3}\,\frac{x^3}{3!} + \text{etc.},$$

et d'autre part, celui qui définit l'exponentielle :

$$e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \text{etc}$$

[u(z+x) - u(z)] et [e^{z} - 1] ont alors la même forme, dès lors qu'on identifie le $\frac{du}{dz}\,x$ du premier développement au z du second, à condition encore d'indentifier aussi puissance n-ième de la différentielle première et différentielle d'ordre n. Lagrange peut ainsi écrire l'accroissement fini d'une fonction [Lagrange, 1772] :

$$u(z+x) - u(z) = \Delta u = e^{\frac{du}{dz}x} - 1,$$

ce que L.F.A. Arbogast (1759-1803) écrira

$$\Delta u = (\, e^{x\delta} - 1)\, u \quad \text{d'où} \quad \Delta^{n}\, u = (e^{x\delta} - 1\,)^{n}\, u$$

en séparant l'opérateur différentiel $\delta = \frac{d}{dz}$ et le symbole u de la fonction [Arbogast, 1800].

Réformateurs convaincus, extrêmement conscients des enjeux qui sont à l'œuvre dans les débats du moment concernant les fondements de l'analyse algébrique, les algébristes du réseau de Cambridge et leurs successeurs vont chercher à intégrer tous les acquis les plus récents de ce domaine, sans les réduire à un simple instrumentalisme, mais au contraire en cherchant à les fonder en raison. Ils partagent le finalisme de Playfair et cherchent à échapper au matérialisme inhérent à l'utilitarisme, sans renoncer pour autant aux connaissances nouvelles que ces méthodes utilisant l'induction et l'analogie ont permis de constituer. Ils vont ainsi travailler à expliciter les principes logiques qui peuvent fonder les calculs littéraux et les analogies opératoires, en leur conférant un statut de légitimation directement issu de leur attachement à la philosophie empiriste de Locke dont ils ont été nourris à l'université.

2. Entre logique des opérations et théorie de l'invention

A Cambridge, le Rév. R. Woodhouse (1773-1827) est le premier mathématicien à publier de nombreux ouvrages et manuels fondés sur les méthodes continentales du calcul différentiel, et à affirmer l'indépendance des méthodes algébriques à l'égard du raisonnement géométrique. Son influence sur le réseau des algébristes anglais est évidente et reconnue, bien qu'il ne puisse être considéré comme membre de ce réseau, en raison de son absence d'engagement personnel dans les tentatives de réforme.

Se démarquant du point de vue de Playfair, Woodhouse affirme radicalement :

That the science of geometry was first invented is properly an accidental circumstance. [24]

Il présuppose au contraire que les paradoxes alors présents en analyse algébrique, comme par exemple ceux qui sont issus de la considération de logarithmes pour les quantités négatives, ou impossibles, ne proviennent pas des méthodes algébriques elles-mêmes, mais du basculement constant entre le registre géométrique et le registre algébrique. Il affirme l'indépendance des méthodes algébriques, revendique le fait qu'elles suffisent à légitimer les résultats de l'analyse algébrique et fonde l'effectivité de ses méthodes en la créditant de l'existence d'une logique propre aux opérations de l'algèbre. Il en spécifie le caractère démonstratif dans les termes mêmes de Locke, en insistant sur la connexion qu'elle établit entre des idées éloignées, et sur la rationalité ainsi accordée à un symbolisme algébrique qui, s'il est arbitraire, n'en reste pas moins création de l'esprit humain :

The arguments that seem to render all operations performed with impossible quantities unintelligible may be included under the following statement. Algebra is a species of short-hand-writing, a language, or system of characters or signs, invented for the purpose of facilitating the comparison and combination of ideas. Now all demonstration by signs, must ultimately rest on observations made on individual objects; and all the varieties of the transformation and combination of signs, except what are arbitrary and conventional, must be regulated by properties observed to belong to the things of which the signs are the representatives. Demonstration by signs is shewn to be true, by referring to the individual things the signs represent; and is shewn to be general, by remarking that the operation is the same, whatever is the thing signified, or, in other words, that the operation is independant of the things signified.

I (am) convinced in my own mind, that there can be neither paradoxes nor mysteries inherent and inexplicable in a system of characters of our own invention, and combined according to rules, the origin and extent of which we can precisely ascertain... Demonstration would be defined to be a method of showing the agreement of remote ideas by a train of intermediate ideas, each agreeing with that next it; or, in other words, a method of tracing the connection between certain principles and a conclusion, by a series of intermediate and identical propositions, each proposition being converted into its next, by changing the combination of signs that represent it, into another shewn to be equivalent to it.[25]

---

[24] "Que la science de la géométrie ait été inventée la première est en tout état de cause une circonstance accidentelle." [Woodhouse, 1802, 89].

[25] "Les arguments qui semblent rendre inintelligibles toutes les opérations effectuées avec des quantités impossibles, peuvent être contenues dans l'affirmation suivante. L'Algèbre est une espèce d'écriture abrégée, un langage, ou un système de caractères ou de signes, inventés dans le but de faciliter la comparaison et la combinaison des idées. De fait, toute démonstration effectuée sur des signes doit finalement reposer sur des observations faites sur des objets particuliers; et toutes les variétés de transformation et de combinaison des signes, sauf ceux qui sont arbitraires et conventionnels, doivent être régies par les propriétés dont on a observé qu'elles appartenaient aux choses dont les signes

La seule signification que Woodhouse attribue aux écritures algébriques est une signification opératoire, qui le conduit déjà à distinguer égalité numérique et équivalence symbolique, et à présupposer une permanence des formes symboliques, que Peacock installera au cœur de son Algèbre Symbolique. Woodhouse prépare ainsi la rupture épistémologique que le réseau des algébristes mènera à son terme sur le plan sociologique et conceptuel. Leur spécificité s'inscrit dans cette conviction de la légitimité des mécanismes opératoires, et dans la recherche d'une explicitation de leurs propriétés formelles.

Ces propriétés formelles ne sont d'ailleurs pas investies du seul statut de légitimation des résultats algébriques. Dans la mesure même où elles se substituent aux analogies opératoires dans ce processus de légitimation, elles constituent également le cadre général de toute production conceptuelle. C'est ainsi que, dès 1813, la préface des *Memoirs of the Analytical Society,* rédigée par Babbage, et collectivement discutée, reprend à son tour la phraséologie de Locke pour fonder sur cette logique opératoire et ce symbolisme algébrique la possibilité d'une théorie de l'invention :

Attentively to observe the operations of the mind in the discovery of new truths, and to retain at the same time those fleeting links, which furnish a momentary connection with distant ideas, the knowledge of whose existence we derive from reason rather than from perception, are the objects in whose pursuit nothing but the most patient assiduity can expect success. Powerful indeed, must be the mind, which can simultaneously carry on two processes, each of which requires the most concentrated attention. Yet these obstacles must be surmounted, before we can hope for the discovery of a philosophical theory of invention; a science which Lord Bacon reported to be wholly deficient two centuries ago, and which has made since that time but slight advances.[26]

La logique opératoire que ces algébristes cherchent à expliciter est ainsi créditée d'une double fonction de légitimation et de découverte des propriétés d'un calcul algébrique qui s'exprime sous la forme d'une écriture symbolique.

IV. G. Peacock et la symbolisation de l'algèbre

Peacock est relativement peu connu dans le milieu mathématique aujourd'hui. Aucun théorème ne porte son nom. En dehors de sa participation active et efficace à l'introduction des méthodes continentales de l'analyse algébrique, de son *Treatise of Algebra* de 1830 à destination des étudiants, et de son *Report on the recent Progress and actual State of*

---

sont les représentants. On montre que les démonstrations faites sur des signes sont vraies, en se référant aux choses individuelles que ces signes représentent; et qu'elles sont générales, en remarquant que l'opération est la même, quelle que soit la chose signifiée, ou, en d'autres termes, que l'opération est indépendante des choses signifiées."
"Je (suis) convaincu pour ma part, qu'il ne peut y avoir ni paradoxes ni mystères intrinsèques et inexplicables dans un système de caractères de notre propre invention, et combinés selon des règles dont nous pouvons préciser l'origine et la validité...La démonstration devrait être définie comme une méthode consistant à montrer la cohérence d'idées éloignées par une suite d'idées intermédiaires, chacune s'accrodant avec la suivante; autrement dit, une méthode consistant à tracer le lien entre certains principes et une conclusion, par une suite de propositions intermédiaires et identiques, chaque proposition étant convertie en la suivante, en changeant la combinaison des signes qui la représente, en une autre dont on montre ainsi qu'elle lui est équivalente." [Woodhouse, 1801, 90, 93, 107].

[26] "Observer attentivement les opérations de l'esprit dans la découverte de nouvelles vérités, et retenir en même temps ces liens fugitifs, qui fournissent une connection momentanée avec des idées éloignées, dont on déduit la connaissance de leur existence plutôt à partir de la raison que de la perception, sont les objets à la poursuite desquelles on ne peut espérer le succès que grâce à la plus patiente persévérance. Quoi qu'il en soit, l'esprit doit être puissant, qui peut conduire simultanément ces deux processus, dont chacun requiert l'attention la plus soutenue. Cependant, ces obstacles doivent être surmontés, avant que nous puissions espérer la découverte d'une théorie philosophique de l'invention, une science que Lord Bacon considérait comme totalement déficiente il y a deux siècles, et qui n'a fait depuis que de légères avancées." [Babbage, Anonyme, 1813, xxi, *Works,* I, 59].

certain branches of Analysis de 1833 à destination du monde savant réuni au 3ème congrès de la *British Association for the Advancement of Science*, il n'a produit aucun mémoire de recherche important pour les *Philosophical Transactions of the Royal Society,* ou pour les *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, dont il est un des fondateurs. Herschel le salue pourtant comme le plus philosophe d'entre eux [Herschel, 1858], et Samuel T. Coleridge (1772-1834), dans la préface de l'*Encyclopædia Metropolitana,* affirme en 1845 que son impressionnant article sur l'arithmétique [Peacock, 1826] est également essentiel pour l'érudit, le mathématicien, et le métaphysicien. W.R. Hamilton, dont l'*Essay on Algebra as the Science of Pure Time* exprime un point de vue sur l'algèbre bien différent de celui de Peacock - dont il se rapprochera pourtant ultérieurement [Graves, 2, 521 ; Hamilton, 1967 (1853), 153] - le qualifie à multiples reprises de sommité en la matière[27], et de fondateur de ce qu'il appelle lui-même l'Ecole Philologique [Hamilton, W.R., 1967 (1837), 3]. Quoi qu'il en soit, après le travail de Peacock, c'est désormais à lui que les algébristes se réfèrent, ou à sa conception du symbolique en algèbre.

1. Comment l'Algèbre Symbolique intègre les acquis de l'expérience

Dès les premières pages du *Report,* Peacock se situe par rapport aux débats relatifs au statut de l'algèbre, en affirmant d'emblée qu'il la considère comme une science spéculative, qu'il a l'ambition d'amener à supplanter les *Eléments* d'Euclide. Science abstraite, démonstrative, dont la complétude et la cohérence ne sont garanties que par un raisonnement déductif fondé sur des premiers principes considérés comme faits ultimes, l'algèbre n'est donc préoccupée que des vérités nécessaires, qui subordonnent toute vérité contingente.

Peacock définit cette algèbre comme "langage du raisonnement symbolique" [Peacock, 1830, 1], et son projet, ce qu'il appelle de manière récurrente "the business of algebra", est d'exprimer toutes les formes équivalentes qui résultent de ces combinaisons formelles.

Pourtant, l'Algèbre Symbolique telle que l'envisage Peacock n'est pas présentée a priori. Elle intervient comme troisième et dernière étape d'un processus d'abstraction dont l'arithmétique constitue la première et l'algèbre arithmétique la seconde, et qui toutes deux s'enracinent dans l'expérience. Directement inspirée par la philosophie empiriste développée par Locke dans son *Essay on Human Understanding,* cette méthodologie, qui respecte scrupuleusement l'étape heuristique et l'étape généralisatrice du processus de symbolisation, apparaît encore plus clairement dans la seconde édition du *Treatise of Algebra,* que Peacock republiera en deux volumes séparés, l'un en 1842 consacré à l'algèbre arithmétique, l'autre en 1845 à l'algèbre symbolique.

L'Algèbre Arithmétique intervient comme "science de suggestion". Elle est conçue comme une "littéralisation" de l'Arithmétique, en ce sens que les nombres y sont remplacés par des symboles, "absolument généraux dans leur forme", mais "spécifiques dans leur valeur" [Peacock, 1833, 200]. En conséquence, ces symboles doivent respecter les limitations de sens ou de valeur qui sont celles de l'Arithmétique. Ainsi, l'écriture $\underline{a-b}$ n'a-t-elle de sens que si $a \geq b$. Dans

---

[27] Trinity College Library, Cambridge, *Peacock Papers,* lettre de Hamilton à Peacok du 27 juillet 1835 Add. Ms b 49[44]. Trinity College Library, Dublin, *Hamilton Papers,* lettre de Hamilton à sa sœur Sidney du 31 octobre 1836. MSS 5123-33, OS 547. Graves, 2, 579, Lettre de Hamilton à J.R. Young du 10 juillet 1847. Graves, 2, 207.

le cas contraire, le résultat est impossible. Y sont également impossibles parce qu'inconcevables numériquement des résultats comme $\sqrt{a}$ pour un nombre a négatif, ainsi que toutes les opérations à résultat multiple. Cette Algèbre Arithmétique correspond à l'état d'une science algébrique dont la cohérence repose sur celle du langage naturel, c'est-à-dire sur le respect des définitions ou des pratiques arithmétiques. Peacock insiste sur la fonction algorithmique de cette algèbre arithmétique, qui lui permet d'identifier calculs finis et infinis comme résultats d'un même processus. Ainsi, polynômes finis ou infinis sont-ils susceptibles d'une même définition opératoire, comme c'est le cas pour la division.

L'Algèbre Symbolique marque un renversement radical de point de vue, puisqu'elle est destinée à faire sauter les verrous d'ordre conceptuel qui limitent les possibilités de l'Algèbre Arithmétique. Sa nécessité logique impose l'abandon du sens des symboles et une attention exclusive portée aux opérations. C'est pourquoi elle est définie comme un système de combinaisons de symboles arbitraires, généraux cette fois "dans leur forme comme dans leur valeur" [Peacock, 1833, 194, 208]. Ainsi, $\underline{a-b}$ a un sens symbolique quels que soient ce que représentent $\underline{a}$ et $\underline{b}$. Il en est de même pour $a^{\frac{1}{2}}$, dont la seule condition d'existence, symbolique, est que : $(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$. C'est ainsi qu'il substitue à l'écriture "discrète" des coefficients de différentiation $\underline{n(n1)(n-2).....(n-r+1)}$, une écriture symbolique où $\underline{n}$ et $\underline{r}$ peuvent désigner des "symboles généraux par leur forme et par leur valeur", et où intervient la fonction eulérienne de seconde espèce Γ [Peacock, 1833, 204-05, 211-212] :

$$n(n-1)(n-2)....(n-r+1) = \frac{\int_0^1 dx(\log 1/x)^n}{\int_0^1 dx(\log 1/x)^{n-r}} = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-r)}$$

Du même coup, Peacock se doit de séparer égalité arithmétique et équivalence symbolique. Le plus souvent, ces deux types d'égalité coïncident, comme dans $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, qui signifie à la fois que les deux membres donnent le même résultat et que le deuxième membre est le résultat de l'opération (a+b)(a+b). Mais, dans le cas du développement d'une fonction en série infinie par exemple, pour des valeurs de la variable qui rendent cette série divergente, ces deux significations se trouvent dissociées. Ainsi, le quotient $\frac{a}{1-x}$ et la série $a+ax+ax^2+ax^3$ +&c sont qualifiés d'algébriquement équivalents puisque la série est le résultat opératoire de la division indiquée par le quotient. Mais les deux expressions ne sont arithmétiquement égales que si x est une fraction propre, ou une quantité inférieure à l'unité [Peacock, 1830, 98-100].

2. Le principe de permanence des formes équivalentes

Peacock conçoit tout à fait clairement la nécessité non seulement logique, mais épistémologique, de justifier le saut conceptuel qui sépare alors la pratique arithmétique d'une théorie générale de l'algèbre. Mais, dans la mesure où il refuse tout autant de s'appuyer sur une procédure constructive que sur une approche axiomatique, seul un présupposé ontologique implicite permet de légitimer le double énoncé du principe de permanence des formes équivalentes, par lequel il s'autorise à transférer à l'algèbre symbolique, toutes les formes générales obtenues en algèbre arithmétique, ce qui lui permet du même coup de faire l'économie d'un long travail de déduction. C'est le double énoncé du principe de permanence des formes équivalentes qui propose une conception génétique de l'Algèbre Symbolique en même temps qu'il pose l'existence de cette même science comme justification des résultats de l'activité mathématique, mais sans jamais imaginer la possibilité d'une évolution dialectique entre les structures qu'elle désigne :

(A) : Whatever form is algebraically equivalent to another when expressed in general symbols, must continue to be equivalent, whatever those symbols denote."
"(B) : Converse Proposition : Whatever equivalent form is discoverable in arithmetical algebra considered as the science of suggestion, when the symbols are general in their form, though specific in their value, will continue to be an equivalent form when the symbols are general in their nature as well as their form.[28]

Toute l'ambiguité épistémologique du travail de Peacock réside dans ce doublé énoncé. Il exprime sa double volonté d'intégrer toute connaissance mathématique issue de l'expérience, et de maintenir sa subordination à des lois symboliques universelles. L' énoncé (B) exprime le fait que la validité de la connaissance acquise réside dans la généralité des formes obtenues : les symboles sont généraux aussi bien dans leur forme que dans leur valeur. Auparavant, l'énoncé (A) suppose de fait la préexistence logique de l'Algèbre Symbolique : c'est parce que ces possibilités opératoires sont préexistantes qu'elles pourront être découvertes dans une pratique qui est ici celle de l'algèbre arithmétique. La finalité de ce double principe, qui réside dans une volonté de voir l'Algèbre Symbolique légitimer toutes les analogies inventives sur lesquelles travaille alors l'analyse algébrique, sous-tend de fait l'idée d'une finalité préétablie, toute idée neuve étant alors le signe, c'est-à-dire l'indice, d'une structure préexistante.

Ce principe de permanence permet à Peacock de refuser que l'Algèbre Symbolique soit une généralisation de l'Algèbre Arithmétique, et il permet de légitimer les résultats des opérations symboliques en lieu et place de toute analogie avec des calculs numériques.

The operations and resulting forms in Arithmetic and Geometry, expressed in symbols, bear a strict analogy to operations bearing the same names, and to the forms resulting similarly from them in Algebra, where the symbols are perfectly general : but it is by the law of the permanence of equivalent forms, and not by analogy, that we are enabled to pass from one to the other : it is only so far, therefore, as Analogy may be considered as a modified expression of this law, that we are legitimely enabled to generalized conclusions deduced by means of it.[29]

C'est en ce sens que l'Algèbre Arithmétique et l'Algèbre Symbolique sont donc deux sciences indépendantes, l'une, science des quantités, l'autre, science des opérations, se différenciant tant du point de vue de leur objet que de leurs méthodes. Ce qui est devenu signifiant pour l'algèbre de Peacock, ce ne sont plus les objets, mais les opérations elles-mêmes. Peacock affirme ainsi non seulement l'indépendance de la rationalité de ces opérations vis-à-vis des objets sur lesquels elle s'exerce, mais la primauté ontologique des opérations sur les objets.

---

[28] "(A) : Toute forme qui est algébriquement équivalente à une autre quand elle est exprimée en symboles généraux doit continuer à lui être équivalente, quel que soit ce que ces symboles représentent."
"(B) : Toute forme qui est découverte en algèbre arithmétique considérée comme science de suggestion, lorsque les symboles sont généraux dans leur forme, bien que spécifiques dans leur valeur, doit continuer à être une forme équivalente quand les symboles sont généraux dans leur nature aussi bien que dans leur forme." [Peacock, 1833, 194].
[29] "Les opérations et les formes qui en résultent en Arithmétique et en Géométrie, exprimées par des symboles, sont porteuses d'une stricte analogie avec les opérations de même nom, et avec les formes qui en résultent semblablement en Algèbre, quand les symboles sont parfaitment généraux : mais c'est par la loi de permanence des formes équivalentes, et non par analogie, que nous sommes capables de passer de l'une à l'autre : c'est seulement dans la mesure, par conséquent, où l'analogie peut être considérée comme une expression modifiée de cette loi, que nous pouvons légitimement généraliser les conclusions que nous avons obtenues grâce à elle." [Peacock, 1830, 108].

3. L'épistémologie sous-jacente au travail de Peacock

Cependant, si les symboles sur lesquels travaillent les opérations sont arbitraires, les opérations elles-mêmes ne le sont pas. Elles ne font qu'exprimer les lois nécessaires de combinaison de ces facultés de l'esprit qui sous-tendent la pensée algébrique. Ainsi Peacock, après avoir affirmé l'entière liberté de choix des principes, n'énonce-t-il comme principes opératoires généraux que la réciprocité entre les opérations d'addition et de soustraction, de multiplication et de division, ainsi qu'un principe de combinaison et une règle de concurrence des signes, directement issus des pratiques de l'analyse algébrique. Si les symboles sont arbitraires, la signification des opérations chez Peacock ne l'est pas :

The operations called addition and substraction are denoted by the signs + and -.They are the inverse of each other.
In the concurrence of the signs + and -, in whatever manner used, if two like signs come together, whether + and +, or - and -, they are replaced by the sign +; and when two unlike signs come together, whether + and -, or - and +, they are replaced by the single sign -. When different operations are performed or indicated, it is indifferent in what order they succeed each other.
The operations called multiplication and division are denoted by the signs x and ÷, or more frequently by a conventional position of the quantities or symbols with respect to each other......
The operations of multiplication and division are the inverse of each other.
In the concurrence of the signs + and - in multiplication or division, if two like signs come together, whether + and +, or - and -, they are replaced by the single sign +; and if two unlike signs come together, whether + and -, or - and +, they are replaced by the single sign -.
When different operations succeed each other, it is not indifferent in what order they are taken. [30]

L'importance accordée au langage ainsi qu'aux procédures opératoires dans cette nouvelle forme de conceptualisation de l'algèbre, ainsi que ce mode de présentation de l'Algèbre Symbolique, relèvent d'une épistémologie historico-génétique qui se donne à voir dans la gradation arithmétique-algèbre arithmétique-algèbre symbolique [Durand, 1990]. Cette épistémologie est très directement marquée par la conception du langage et de l'abstraction présente dans la philosophie de J. Locke relative à l'élaboration du langage, dont l'*Essay on Human understanding* est en effet partie prenante du fonds culturel de l'Université de Cambridge. Comme chez Locke lorsqu'il est question de savoir quelle est la place de ce langage apparemment dépourvu de toute référence ontologique [Locke, IV.4.2, IV.4.4, IV.6.14 ; Duchesneau, 1973, 199-202], ce principe de permanence fait apparaître l'idée d'une finalité d'un monde conçu comme création achevée une fois pour toutes, finalité qui sert à Peacock de légitimation implicite lui permettant d'éviter la rupture épistémologique qui lui permettrait d'assumer la liberté du mathématicien comme créateur potentiel d'un langage formel.

---

[30] "Les opérations appelées *addition* et *soustraction* sont désignées par les signes + et -. Elles sont inverses l'une de l'autre."
"Dans la concurrence des signes + et -, quelle que soit la manière dont ils sont utilisés, si deux signes se suivent, qu'ils soient + et +, ou - et -, ils sont remplacés par le signe +; et quand deux signes différents se suivent, qu'ils soient + et -, ou - et +, ils sont remplacés par le seul signe -."
"Quand différentes opérations sont effectuées ou indiquées, l'ordre dans lequel elles se succèdent est indifférent."
"Les opérations appelées *multiplication* et *division* sont désingées par les signes x et , ou plus fréquemment par une position conventionnelle des quantités ou des symboles les uns par rapport aux autres."
"Les opérations de multiplication et de division sont inverses l'une de l'autre."
"Dans la concurrence des signes + et - dans la mutliplication ou la division, si deux signes se suivent, qu'ils soient + et +, ou - et -, ils sont remplacés par le seul signe +; et quand deux signes différents se suivent, qu'ils soient + et -, ou - et +, ils sont remplacés par le seul signe -."
"Quand différentes opérations se succèdent, l'ordre dans lequel elles sont effectuées n'est pas indifférent." [Peacock,1833, 196-97].

Ainsi Peacock rend-il effectif la distinction perçue par Whately, et refusée par Hamilton, entre les trois significations du terme "opération". L'Algèbre Symbolique ne peut assumer son statut de science des vérités nécessaires qu'en renonçant à la signification des opérations prise dans le langage naturel. La question de la divergence des séries, par exemple, qui concerne la valeur numérique des formes algébriques, relève donc du domaine de l'interprétation des symboles, et non pas de celui d'une logique de l'opératoire :

It is this confusion of necessary and contingent truth which has occasionned much of the difficulty which has attended the theories of the interpretation of algebraical signs. It has been supposed that a meaning could be transmitted through a succession of merely symbolical operations, and that there would exist at the conclusion an equally necessary connexion between the primitive definition and the ultimate interpretation, as between the final symbolical result and the laws which govern it. So long as the definitions both of the meaning of the symbols are sufficient to deduce the results, those results will have a necessary interpretation which will be dependent upon a joint consideration of all those conditions ; but whenever an operation allow it to be strictly defined or interpreted, the chain of connexion is broken, and the interpretation of the result will be no longer traceable through its successive steps. [31]

Avec le travail de Peacock, l'objet de la connaissance mathématique change donc de nature. Si l'Algèbre Symbolique ne saurait être considérée comme une algèbre des séries formelles, elle est bel et bien algèbre des procédures algorithmiques opératoires, ne réalisant qu'à l'infini l'ensemble de ses potentialités. Ce point de vue résulte directement de l'élaboration d'un compromis conceptuel face aux exigences contradictoires auxquelles se trouve confronté ce mathématicien whig anglican qu'est Peacock. Il vise à constituer l'algèbre, non plus comme un outil ou une technique, mais comme un savoir fondamental : intégrer à l'algèbre l'ensemble des résultats obtenus par ses pratiques inventives, maintenir la possibilité d'en intégrer de nouveaux à l'avenir, et affirmer le caractère essentiel de ces mécanismes opératoires en dégageant les critères qui en font un ensemble de vérités nécessaires. La nouveauté du travail de Peacock réside précisément dans cette primauté accordée à l'aspect structurel des opérations sur toute autre considération contingente relative aux objets de la connaissance mathématique. Elle passe par l'explicitation des propriétés de ces procédures opératoires.

V. La médiation de Boole et l'algébrisation de la logique

Si Boole est effectivement un autodidacte, il est essentiel de percevoir que ce terme n'a, au début du XIXe siècle, et surtout en Angleterre, ni la signification ni les implications qu'il peut avoir aujourd'hui. Comme je l'ai précisé ci-dessus, la culture mathématique n'est alors pas rare en dehors des Universités. Si le père de Boole était cordonnier, il avait construit un télescope, invitant ses voisins à y contempler les "œuvres de Dieu", et il était surtout bibliothécaire et conservateur de la bibliothèque du *Mechanics Institute* de Lincoln, dont il était un des fondateurs. C'est là que Boole va

[31] "C'est cette confusion entre vérité nécessaire et contingente qui a occasionné la plupart des difficultés attachées aux théories de l'interprétation des signes algébriques. On a supposé que la signification pouvait être transmise par une succession d'opérations seulement symboliques, et qu'il existerait en conclusion une connexion également nécessaire entre la définition primitive et l'interprétation finale, comme entre le résultat symbolique final et les lois qui le gouvernent. Tant que les définitions de la signification des symboles, et des opérations auxquelles on veut les soumettre, suffisent à déduire les résultats, ces résultats auront une interprétation nécessaire qui dépendra de la considération globale de toutes ces conditions; mais à chaque fois qu'on doit effectuer une opération dans des circonstances qui ne lui permettent pas d'être strictement définie ou interprétée, la chaîne des connexions est rompue, et l'interprétation du résultat ne pourra plus être suivie à travers ses étapes successives. Ceci doit avoir lieu à chaque fois que sont introduites des quantités négatives ou autrement affectées, et que des opérations, sur ou avec ces quantités, doivent être effectuées, même si ces quantités et ces signes peuvent disparaître du résultat final." [Peacock, 1833, 230].

s'intier aux mathématiques supérieures, ainsi qu'au contact de Sir Edward French Bromhead, proche ami de Babbage et un des membres de *The Analytical Society*. La méthode d'Arbogast, séparant les symboles de différentiation de ceux des quantités, qui a tant inspiré les travaux de ce groupe et du réseau tout entier [Durand-Richard, 1995], est au cœur des premiers articles qu'il publie dans *The Cambridge Mathematical Journal* à partir de 1841, et constitue le sujet même de son article "On a General Method in Anlysis", qui lui vaudra un prix de la *Royal Society* en 1844. Boole noue là des contacts étroits avec de nombreux mathématiciens de la seconde génération des initiateurs de l'algèbre symbolique : Gregory et Robert L. Ellis (1817-59), co-fondateurs du *Cambridge Mathematical Journal* , William Thomson (1824-1907), futur Lord Kelvin, qui dirigera ce même journal quand il deviendra le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* à partir de 1845, De Morgan, le Rév. Philippe Kelland (1808-79), professeur de mathématiques à l'université d'Edinburgh, qui approfondit le travail de Peacock sur le principe de permanence, et le Rév. Charles Graves (1812-99) professeur de mathématiques au Trinity College de Dublin. Tous recommandent la candidature de Boole pour la chaire de professeur au Queen's College de Cork en 1849. Et Boole maintient son intérêt pour les questions qui ont conduit Babbage à concevoir son *Analytical Engine* [Durand-Richard, 1992] : la résolution des équations différentielles des équations aux différences finies, et leurs méthodes symboliques de résolution [Boole, 1859 ; Boole, 1860].

1. Boole et l'Algèbre Symbolique

Entre 1833 et 1847, entre le travail de Peacock et celui de Boole, ces mathématiciens ont spécifié les conditions à prendre comme hypothèses pour pouvoir développer rigoureusement un calcul des opérations. Mais la problématique générale demeure : elle consiste à séparer strictement, dans le raisonnement, la question des vérités nécessaires de celle de l'interprétation des résultats. Et cette problématique est constamment réaffirmée chez Boole, tout comme son engagement dans les débats sur les fondements de la connaissance et le statut de la logique et des mathématiques pour caractériser une éducation libérale, un engagement qui va bien au-delà de ce qu'il affirme être sa réaction à la querelle de priorité entre W. Hamilton et De Morgan [32].

Si Boole ne nomme pas Peacock dans son travail, il se réfère directement à l'Algèbre Symbolique dès les premières pages de *Mathematical Analysis of Logic* (1847), alors qu'il insiste sur la distinction entre les lois de combinaison qui interviennent en analyse et leur interprétation. Comme en témoigne la structure de son travail, il a plus précisément en tête l'article de Gregory de 1840 portant sur la "vraie nature de l'algèbre symbolique". Mais, comme Woodhouse et Peacock l'avaient fait avant lui, il qualifie systématiquement de "circonstances accidentelles" le fait que cette séparation n'ait pas été pleinement reconnue jusque là, et que les propriétés des opérations aient été attribuées aux grandeurs.

They who are acquainted with the present state of the theory of Symbolical Algebra, are aware, that the validity of the processes of analysis does not depend upon the interpretation of the symbols which are employed, but solely upon the laws of their combination. Every system of interpretation which does not affect the truth of the relations supposed, is equally admissible, and it is thus that the same process may, under one scheme of interpretation, represent the solution of a question on the properties of numbers, under another, that of a geometrical problem, and under a third, that of a problem of dynamics or optics. This principle is indeed of fundamental importance; and it may with safety be affirmed,

---

[32] Cf. note 18.

that the recent advances of pure analysis have been much assisted by the influence which it has exerted in directing the current of investigation.[33]

Cette nécessité d'une séparation entre propriétés symboliques et interprétation des symboles est clairement réaffirmée dans les *Investigations on the Laws of Thought* de 1854, en particulier à propos des parties du calcul qu'il élabore, pour lesquelles il ne trouve aucune correspondance avec les lois de la pensée, et pour lesquelles Boole donne l'exemple des quantités impossibles.

2. La logique comme Algèbre Spéciale

Boole n'éprouve donc aucune répugnance particulière à accepter l'aspect mécanique du calcul symbolique. Il va même jusqu'à citer John Stuart Mill (1806-1873) à ce sujet, précisant toutefois que la possibilité "d'appliquer les formes mathématiques à la science de la logique n'est pas seulement une question de notation" [Boole, 1847, 2]. Soutenant Whately contre W. Hamilton, il affirme la similitude de nature des mathématiques et de la logique, et, aux objections portant sur le risque de vacuité intellectuelle d'un calcul mené automatiquement sur des symboles arbitraires, Boole oppose l'idée que la possibilité d'un tel calcul repose nécessairement sur les facultés de l'esprit, qu'elle ouvre aux meilleurs esprits l'accès à de telles facultés, en particulier à la faculté de généralisation, qui échappe à la seule raison [Boole, 1847, 10]. Il n'accepte donc pas un point de vue strictement instrumental de la logique, affirmant au contraire que la logique est "fondée sur des faits d'un autre ordre qui résident dans la constitution de l'Esprit", et insistant sur "la vérité spéculative de ses principes". Telle est la raison fondamentale qui légitime la liaison intime entre logique et langage :

That which renders Logic possible, is the existence in our minds of general notions, - our ability to conceive of a class, and to designate its individual members by a common name. The theory of Logic is thus intimately connected with that of Language. A successful attempt to express logical propositions by symbols, the laws of whose combinations should be founded upon the laws of the mental processes which they represent, would, so far, be a step towards a philosophical language.[34]

Boole fonde ainsi sa Logique, aussi bien en 1847 qu'en 1854, sur l'acte mental de sélection dans l'univers des objets, un acte mental qui n'est pas considéré du point de vue de sa nature, mais dans sa réalisation elle-même, muni des lois de combinaison et de succession [Boole, 1847, 16 ; 1992 (1854), 59-60]. Le symbole électif <u>x</u> représente l'opération mentale grâce à laquelle les éléments sont choisis, avant d'être identifié à cette classe elle-même. Comme les opérations

[33] "Ceux qui connaissent l'état présent de la théorie de l'Algèbre Symbolique savent que la validité des processus de l'analyse ne dépend pas de l'interprétation des symboles employés, mais seulement des lois de leur combinaison. Tout système d'interprétation qui n'affecte pas la vérité des relations supposées peut être également admis, et c'est ainsi que le même processus peut, dans un système d'interprétation, représenter la solution d'une question sur les propriétés des nombres, dans un autre, celle d'un problème de géométrie, et dans une troisième, celle d'un problème de dynamique ou d'optique. Ce principe est bien sûr d'une importance fondamentale ; et on peut affirmer en toute sécurité, que les avancées récentes de l'analyse pure ont beaucoup été portées par l'influence qu'il a exercé sur la direction du courant de recherche." [Boole, 1847, 3].

[34] "Ce qui rend la Logique possible, c'est l'existence, dans nos esprits, de notions générales - notre capacité à concevoir une classe, et à désigner ses éléments individuels par un nom commun. La théorie de la Logique est ainsi intimement liée à celle du Langage. Réussir à exprimer les propositions logiques par des symboles, ainsi que les lois dont les combinaisons soient fondées sur les lois des processus mentaux qu'ils représentent, serait donc, de ce point de vue, une étape vers un langage philosophique." [Boole 1847, 4-5].

de l'algèbre ordinaire, les opérations mentales sont "commutatives" et "distributives", vocabulaire absent du travail de Peacock, mais présent dans celui de Gregory [Gregory, 1840, III ; Servois, 1814-15], qui l'emprunte à Servois. Boole reprend ici le théorème énoncé par Gregory dès 1839, qu'il a lui-même déjà mis en œuvre en 1844 : il s'agit désormais d'une version constructive du principe de permanence des formes équivalentes, qui autorise à transférer les propriétés mathématiques d'un domaine à un autre, pourvu qu'ils soient exprimés avec les mêmes symboles. Pour Boole, ce transfert a lieu de l'algèbre à la logique. Il établit que la réitération d'un ou de plusieurs actes de sélection distincts conduit à écrire les opérations logiques $xy = yx$, $x(y+z) = xy + xz$, $x^2 = x$, où le produit représente la sélection successive de deux classes à partir du même univers, tandis que la somme dénomme deux classes disjointes. Et il affirme que :

The laws, the axioms, an the processes, of such an Algebra will be identical in their whole extent with the laws, the axioms, and processes of an Algebra of Logic. Difference of interpretation will alone divide them. Upon this principle the method of the following work is established.[35]

C'est dans cette mesure même que ces expressions symboliques des lois de la pensée peuvent alors être soumises au calcul algébrique. Et c'est précisément cette volonté d'appliquer les analogies qu'il constate ainsi entre les expressions symboliques des opérations logiques et celles des opérations de l'algèbre qui impose à Boole de ne considérer que des classes disjointes. L'algèbre de la logique de Boole n'est donc pas celle que l'on appelle aujourd'hui algèbre booléenne, et qui a été révisée par ses successeurs.

En particulier, pour la syllogistique, à l'élimination du moyen terme entre les deux prémisses d'un syllogisme correspond dans ce calcul l'élimination d'une inconnue entre deux équations, et un tel processus peut même être généralisé à un nombre quelconque d'équation - donc de propositions - et ce, d'autant plus facilement que, dans cette Algèbre Spéciale, comme l'appelle Boole, $x^2 = x$, donc $x^n = x$. En ce sens, le travail de Boole correspond précisément à une mathématisation de la syllogistique aristotélicienne, alors que vingt-cinq ans plus tard, avec des ambitions différentes, Gottlob Frege (1848-1925) construira directement, à partir des mathématiques de la fin du XIX^e siècle, une théorisation plus générale de la déduction.

3. L'épistémologie du travail de Boole

Mais en dépit du projet affirmé de vouloir "construire les mathématiques de l'intellect humain" [Boole, 1847, 7], il serait encore anachronique d'envisager cette logique comme une application des mathématiques. Depuis Peacock et notamment avec Gregory, le statut de l'algèbre symbolique s'est déplacé : expression de la structure unique des opérations de l'analyse algébrique chez Peacock, elle est déjà devenue chez Gregory un domaine plus général, celui d'une science des opérations, gouverné par un principe constructif permettant d'en expliciter les méthodes par différentes formes de calcul algébrique, soumises à des hypothèses spécifiques, permettant de les exprimer symboliquement. Les mathématiques et la logique deviennent ainsi différentes interprétations possibles de certains

---

[35] "Les lois, axiomes et procédures d'une telle algèbre seront identiques, en tout point, aux lois, axiomes et procédures d'une Algèbre de la Logique. Elles ne se distingueront que par une différence d'interprétation. C'est sur ce principe qu'est établie la méthode générale de cet ouvrage." [Boole, 1854, 38 ; 1992, 55]. Voir aussi Boole 1847, 18, et Boole 1854, 31.

calculs symboliques dont il convient à chaque fois de préciser les interprétations initiales et les lois opératoires. La logique de Boole s'affirme ainsi comme expression symbolique du raisonnement valide, fondé sur les opérations de l'esprit. En effet, même si Boole parle d'axiomes à propos des premiers principes de ces calculs, il persiste à les fonder sur les facultés de l'esprit, car il exige qu'ils soient fondés sur autre chose que leur seule effectivité. Quant à l'induction, si elle fait partie des méthodes admises dans les sciences expérimentales, elle est exclue des méthodes admises en logique. Si Boole peut se permettre de traiter la logique à la manière d'une science positive, du seul point de vue de son effectivité, c'est parce que l'écriture symbolique obtenue en considérant les opérations de sélection est la même que celle qu'on obtient en considérant les classes d'objets obtenues par sa mise en œuvre [Boole, 1992, ch. 2 et 3]. Et il se réfère constamment, pour justifier de cette coïncidence, à un principe d'ordre, d'harmonie, de cohérence, grâce auquel l'esprit humain peut percevoir ces idées générales par le biais de certaines analogies, qui sont toujours révélatrices du règne de l'ordre et de la loi. L'expression symbolique des lois logiques est donc envisagée comme une manifestation du règne de la nécessité.

It is the ability inherent in our nature to appreciate Order, and the concurrent presumption, however founded, that the phænomena of Nature are connected by a principe of Order. Without these, the general truths of physical science could never have been ascertained.... [In logic,] that principle of order or analogy upon which the reasoning is conducted must either be stated or apprehended as a general truth, to give validity to the final conclusion. In this form, at least, the necessity of general propositions as the basis of inference is confirmed, - a necessity which, however, I conceive to be involved in the very existence, and still more in the peculiar nature, of those faculties whose laws have been investigated in this work. [....] But besides the general propositions which are derived by induction from the collated facts of experience, there exist others belonging to the domain of what is termed necessary truth. Such are the general proposition of Arithmetic, as well as the propositions expressing the laws of thought upon which the general methods in this treatise are founded; and these propositions are not only capable of being rigorously verified in particular instances, but are made manifest in all their generality from the study of particular instances.[36]

Fort des développements qu'il vient de proposer, Boole peut alors conclure son ouvrage en consacrant tout le dernier chapitre à préciser sa position dans les débats qui opposent logique et mathématiques comme fondement de la connaissance humaine, se référant à la fois à la *Philosophy of the Inductive Sciences* de Whewell, et à l'*Essai sur les Fondements de notre Connaissance*. d'Antoine Augustin Cournot (1801-77). Il éprouve la même difficulté que Peacock devant le saut conceptuel qui sépare démarche inductive et raisonnement déductif. Pas plus que lui, il ne peut franchir le pas de la démarche délibérément constructive et axiomatique, puisqu'il refuse que les mathématiques et la logique soient créations de l'esprit humain [MacHale, 1985, 43-44]. Il fait des mathématique l'expression des nécessités logiques, et persiste à séparer, en mathématiques, sa partie symbolique, nécessaire, et sa partie interprétative, contingente, appuyant ainsi la distinction entre validité et vérité.

---

[36] "C'est la capacité, inhérente à notre nature, à reconnaître un Ordre, jointe à la supposition, de quelque manière qu'on la fonde, que les phénomènes de la nature sont reliés par un principe d'Ordre. Sans ces éléments, on n'aurait jamais pu établir les vérités générales des sciences de la Nature. ... [En logique], le principe d'ordre ou d'analogie d'après lequel on conduit le raisonnement, doit nécessairement être énoncé ou compris comme une vérité générale pour valider la conclusion finale. Sous cette forme du moins, la nécessité de l'inférence se trouve confirmée - une nécessité dont je pense qu'elle découle de l'existence même, et plus encore, de la nature particulière des facultés dont les lois ont été examinées dans cet ouvrage. ... Mais, outre les propositions générales obtenues par induction à partir des faits d'expérience, il en existe d'autres relevant du domaine des vérités dites *nécessaires*. C'est le cas des propositions générales de l'Arithmétique ainsi que des propositions qui traduisent les lois de la pensée sur lesquelles se fondent les méthodes générales exposées dans ce traité ; et ces propositions ne sont pas seulement susceptibles d'être vérifiées de manière rigoureuse dans des cas particuliers, mais se manifestent dans toute leur généralité au sein même de l'étude de cas particuliers." [Boole,1854, 403-04 ; 1992, 387-88].

Perhaps the most obviously legitimate bearing of such speculations would be upon the question of the place of Mathematics in the system of human knowledge, and the nature and office of mathematical studies, as a means of intellectual discipline [...] . The laws of thought, in all its processes of conception and reasoning, in all those operations of which language is the expression or the instrument, are of the same kind as are the laws of the knowledge processes of Mathematics. It is not contended that it is necessary for us to acquaint ourselves with those laws in order to think coherently [...] Still less is it desired to exalt the reasoning faculty over the faculties of observation, of reflection, nd of judgment. But upon the very ground that human thought, traced to its ultimate elements, reveals itself in mathematical forms, we have a presumption that the mathematical sciences occupy, by the constitution of our nature, a fundamental place in human knowledge, and that no system of mental culture can be complete or fundamental, which altogether neglects them.
But the very same class of considerations shows with equal force the error of those who regard the study of Mathematics, and of their applications, as a sufficient basis either of knowledge or of discipline. If the constitution of the material frame is mathematical, it is not merely so. ...
Much of thie error, as actually existent among us, seems due to the special and isolated character of scientific teaching - which character it, in its turn, tends to foster. [...] It is impossible, however, not to contemplate the particular evil in question as part of a larger system, and connect it with the too prevalent view of knowledge as a merely secular thing, and with the undue predominance ... of those motives ... which are founded upon a regard to its secular advantages. [37]

Mais, quelles que soient ses relations avec la nature profonde de l'intellect humain, les mathématiques restent une science profane, qui ne prend tout son sens que dans la mesure où, comme l'avait déjà affirmé Locke et comme le soutenait encore la théologie naturelle, toute cette connaissance participe de la connaissance de la Divine Providence. La connaissance humaine ne peut avoir comme seule prétention que de découvrir la vérité, à travers ses aspects nécessaires et ses aspects contingents, mais en aucun cas de la produire.

Conclusion

Cette présentation nécessairement trop générale des travaux du réseau des algébristes anglais de la première moitié du XIX^{e} siècle rend compte des conditions socio-culturelles et épistémologiques d'élaboration d'une conception de l'algèbre comme langage symbolique, et présente cette production conceptuelle comme la recherche de solutions de médiation dans le conflit aux multiples facettes qui oppose les mathématiques et la logique comme fondements de la connaissance autour des universités anglicanes anglaises et des institutions scientifiques traditionnelles de cette époque.

---

[37] "Peut-être la conséquence, manifestement la plus légitime à tirer de ces réflexions, concernerait-elle la question de la place des mathématiques dans le système des connaissances humaines, ainsi que de la nature et du rôle des études mathématiques dans la formation intellectuelle....Les lois de la pensée dans toutes ces procédures de conception et de raisonnement, dans toutes les opérations dont le langage est l'expression ou l'instrument, sont de même nature que les lois des procédures mathématiques reconnues. On ne veut pas dire par là qu'il nous soit nécessaire de connaître ces lois pour penser correctement, ou, au sens courant de l'expression, bien raisonner .... On voudrait encore moins exalter la faculté de raisonnement au détriment des facultés d'observation, de réflexion ou de jugement. Simplement, en nous appuyant sur le fait que la pensée humaine, dans ses éléments ultimes, se révèlent sous des formes mathématiques, nous pouvons présumer que les sciences mathématiques occupent, à cause de la constitution même de notre nature, une place fondamentale dans les connaissances humaines et qu'aucun système de culture de l'esprit ne saurait être achevé ou fondamental s'il en néglige totalement l'étude."
"Mais ce sont ces mêmes considérations qui révèlent avec la même évidence l'erreur de ceux qui considèrent l'étude des mathématiques comme une base suffisante de connaissances ou de formation. Si la structure du monde matériel est mathématique, elle n'est pas que cela."
"... Cette erreur qui sévit effectivement parmi nous semble due, en grande partie, au caractère spécialisé et séparé de l'enseignement scientifique qu'elle a tendance, en retour, à renforcer. .. Il est cependant impossible de ne pas considérer ce mal particulier comme un élément d'un ensemble plus vaste, et de ne pas le rapporter à cette conception trop répandue du savoir comme purement profane ainsi qu'à la prédominance indue ... des motifs ... qui reposent sur la seule considération des intérêts profanes de la science." [Boole,1854, 422-24 ; 1992, 405-07]

Sur le plan socio-culturel, cette élaboration d'une nouvelle conception de l'algèbre s'enracine dans un vaste mouvement de rénovation des institutions traditionnelles du savoir, face aux besoins de reconnaissance intellectuelle de la bourgeoisie montante, qui se manifestent autour des nouvelles villes industrielles de province.

Sur le plan de l'épistémologie, elle participe d'un mouvement qui, autour d'Oxford, tend à expliciter et à isoler la partie strictement logique des raisonnements menés en économie politique, afin de préciser s'il s'agit d'une science déductive ou d'une science expérimentale : et qui, autour de Cambridge, tend à expliciter et à isoler la partie strictement déductive des raisonnements algébriques.

Sur le plan conceptuel, elle débouche sur un rapprochement entre logique et mathématiques, l'une puisant dans l'écriture algébrique la possibilité d'une radicalisation de la syllogistique scolastique, les autres menant une réflexion approfondie sur les procédures opératoires et séparant plus radicalement la question de la validité et celle de la vérité.

Si rupture épistémologique il y a, elle porte davantage sur l'importance accordée à la validation logique des raisonnements que sur le caractère purement abstrait de l'algèbre, et sur la validation des propriétés qui garantissent le caractère algorithmique de procédures opératoires encore très attachées aux opérations de l'arithmétique. Elle marque la naissance de cette séparation radicale entre validation logique et légitimité interprétative des opérations, que la logique fait fonctionner depuis en respectant les niveaux syntaxique et sémantique de ses analyses.

Cependant, dans les travaux examinés ici demeure constamment une référence explicite à l'existence d'un monde pré-existant, qu'il concerne le monde matériel des objets ou la nature de l'intellect humain, qui apporte une garantie ontologique au caractère opératoire qu'il s'agit de privilégier. La question demeure de comprendre comment sera, dans l'avenir, légitimé ce caractère opératoire dès lors qu'on abandonnera cette référence ontologique à la nature de l'intellect humain.

Une présentation plus complète des travaux de ce réseau passerait par l'analyse des travaux sur le calcul fonctionnel, avec les travaux de Babbage et de De Morgan, des travaux sur la mécanisation des calculs, avec les travaux de Babbage et de Jevons, sur le développement du calcul des opérations chez les algébristes de la seconde génération, qui interviennent plus loin de Cambridge, et sur son influence sur le développement des méthodes symboliques, notamment dans la résolution des équations différentielles. Une telle analyse est en cours : certains de ses aspects ont déjà fait l'objet d'autres articles, publiés ou à paraître, les autres restent à produire.

Bibliographie

Hormis la traduction de Boole 1992, toutes les traductions des textes anglais, données en note, sont de l'auteur de l'article.

Sources primaires

> Arbogast, L.F.A., *Du Calcul des Dérivations*, Strasbourg, 1800.
> Babbage, Ch., 1989, *The Works of Ch. Babbage*, Ed. Campbell-Kelly, London, Pickering, 11 vol.
- id., 1820, *Examples of the Functional Equations*, Cambridge.
- id., 1829, "Account of the great congress of Philosophers at Berlin on the 18th September, 1828", *Edinburgh Journal of Science,* 10, 225-34, repris en appendice des*Reflections* de 1830 ; *Works*, 7, 111-20.
- id., 1830, *Reflections on the Decline of Science in England and some of its Causes*, London ; *Works*, vol. 7.
- id., 1832, C., *On the Economy of Machinery and Manufactures*, London, 1832, *Works*, 8.
> Boole, G., 1841, "On the Integration of Linear Differential Equations with constant coefficients", *Cambridge Mathematical Journal,* 2, 114-119.
- id., 1844, "A General Method in Analysis", *Philosophical Transactions*, 134, 225-282.
- id., 1847, *The Mathematical Analysis of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, Cambridge, McMillan, Barclay & McMillan.

- id., 1854, *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities*, London. Reprinted in Boole's *Collected Logical Papers*, Chicago-London, 1916, 2 vol.
- id., 1859, *A Treatise on Differential Equations*, Cambridge, 2d ed., 1865.
- id., 1860, *Treatise on the Calculus of Finite Differences*, Cambridge.
- id. 1992, *Les lois de la pensée,* Trad. fr. de *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical Theories of Logic and Probabilities*, S.B. Diagne, Paris, Vrin.
> De Morgan, A., 1847, *Formal Logic or the Calculus of Inference necessary and probable*, Londres.
> Descartes, R., 1964-74, *Œuvres de Descartes,* (éd.) Adam-Tannery, Paris, Vrin, 12 vols. XX.
> Graves, R.P., 1882-85-89-91, *Life of Sir William Rowan Hamilton, Including Selections from His Poems, Correspondence, and Miscellaneous Writings,* London, Longmans, Green & Co. 3 vol. & addendum.
> Greatheed, S.S., 1837, "A new Method of solving equations of partial differentials", *Philosophical Magazine,* 11, 239-47.
> Gregory D.F., 1839 , "On the solution of linear equations of finite and mixed differences", *C.M.J.,* 1, 54-62, *Mathcal Writings*, 33-42.
- id., 1840, "On the Real Nature of Symbolical Algebra", *Transactions of the Royal Society of Edinburgh,* 14, 208-16.
> Hamilton, W., 1831 (1852), (Anonyme), "On the State of the English Universities", *Edinburgh Review,* june 1831, vol. 53, n° 106, 384-427 ; déc. 1831, vol. 54, n° 108, 478-504. Republié dans *Discussions on Philosophy and Literature, Education and University Reform, Chiefly from the Edinburgh Review,* London 1852, 386-463.
- id., 1833 (1852), (Anonyme), "Recent Publications on Logical Science", *Edinburgh Review,* avr. 1833, vol. 58, n° 115, 194-238. Republié dans *Discussions on Philosophy and Literature, Education and University Reform, Chiefly from the Edinburgh Review,* London 1852, 116-174.
- id., 1836 (1852), (Anonyme), "CR Thoughts on the Study of Mathematics as a part of a Liberal Education, from W. Whewell", *Edinburgh Review,* janv. 1836, vol. 62, n° 126, p. 409-55. Republié sous le titre : "On the Study of Mathematics as an exercise of mind", dans *Discussions on Philosophy and Literature, Education and University Reform, Chiefly from the Edinburgh Review,* London 1852, 257-327.
- id., 1860-77, *Lectures on Metaphysics and Logic*, Edinburgh and London, 4 vol., I et II, 1877 : Metaphysics, III et IV, 1860 : Logic.
> Hamilton, W.R., 1837, "Theory of conjugate functions, or algebraic couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time", *Transactions of the Royal Irish Academy,* 17, 203-422. *Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton,* Cambridge, Camb. Un. press, vol. 3 : "Algebra", ed. H. Halberstam & R.E. Ingram, 3-96.
- id., 1853, "Lectures on Quaternions", in *Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton,* Cambridge, Camb. Un. press, vol. 3 : "Algebra", ed. H. Halberstam & R.E. Ingram, 107-323.
> Herschel, J.F.W., 1820, *Examples of the Calculus of the Finite Differences*, Cambridge.
- id., 1858, "Obituray Notice on G. Peacock", *Proceedings of the Royal Society,* 9, 536-541.
> Lacroix, S.F., 1816, *An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus,* translated from the french, with an Appendix and Notes. Deighton and sons, Cambridge. Law & Whittaker, London. Traduction Babbage, Ch., Herschel, J.F.W., Peacock, G.
> Lagrange, J.L., 1772, "Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables", *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres.* 1772, Berlin, 185-221. 1867-92, *Oeuvres*, Paris, Gauthier-Villars, 3, 439-476.
> Lardner, D., 1834, "Babbage's calculating engine", *Edinburgh Review*, vol. 59, 1834, 263-327, Babbage, *Works*, 2, 118-86.
> Leibniz, G.W., 1975, "Histoire et origine du calcul différentiel", (1714, non publié), traduction R. Szeftel, *Les Cahiers de Fontenay,* n° 1, 3ème éd., 58-99.
> Locke, J.,1694, *Essay on Human Understanding*, 2nd ed., London ; 1755, trad. fr. M. Coste, Paris.
> Peacock, G., 1820, *A Collection of Examples on the Calculus of the Applications of the Differential and Integral Calculus*, Cambridge.
- id., (1826), "Arithmetic", *Encyclopaedia Metropolitana,* London, 1845, I, 369-523.
- id., 1841, *Observations on the Statutes of the University of Cambridge,* Cambridge.
> Playfair, J., 1778, "On the Arithmetic of Impossible Quantities", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 68, 318-343.
- id., 1808, "Review of Laplace's *Traité de Mécanique Céleste*", *Ed. Review*, 11, 249-84.
- id., (Anonymous) (1810) : Review : "A Reply to the Calumnies of the Edinburgh Review against Oxford ; containing an Account of Studies pursued in that University. Oxford". *Edinburgh Review*, vol. 16, n° XXXI, apr. 1810, 158-87.
> Royal Society Library, *Herschel Mss.*
> Servois, F.J., 1814-15, "Réflexions sur les divers systèmes d'exposition des principes du calcul différentiel, et en particulier sur la doctrine des infiniment petits", *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées,* V, 141-170
> Stewart, D., 1814, *Elements of Philosophy of Human Mind,* vol. II, London.
> Whately, R., 1826, *Elements of Logic*, London; republié dans *Encyclopædia Metropolitana,* London, 1849.
> Whewell, W., 1837, *History of the Inductive Sciences, from the earliest to the present time,* London, 3 vols.
- id., 1840, *The Philosophy of the Inductive Sciences founded upon their History,* London, 2 vols.

> Woodhouse, R.,1801, "On the Necessary Truth of certain Conclusions obtained by means of imaginary quantities", *Phil. Trans.*, 91, 89-120.
- id., 1802, "On the Independance of the Analytical and Geometrical Methods of Investigation, and on the Advantages to be Derived from their Separation", *Phil. Trans.*, 92, 85-125.
- id., *Principles of Analytical Calculation*, Cambridge, 1803.

Sources secondaires

> Bourdé, G., Martin, H., 1983, *Les écoles historiques,* Paris, Seuil.
> Cajory, F., 19.., *Limits and Fluxions in Great-Britain form Newton to Woodhouse,*
> Cannon, W.F., 1964,,"Scientists and Broadchurchmen : An Early Intellectual Network", *Journal of British Studies*, IV, n° 1, 65-88.
> Chartier, R., 1998, *Au bord de la falaise, L'histoire entre certitudes et inquiétude,* Paris, Albin Michel, Histoire.
> Corsi, P., 1988, *The heritage of Dugald Stewart : Oxford Philosophy and the method of Political Economy,* Firenze, Leo S. Olschki editore
> Diagne, S.B., 1989, *Boole, l'oiseau de nuit en plein jour*, Belin, Paris.
> Duchesneau, F., 1973, *L'empirisme de Locke,* La Haye, M. Nijhoff.
> Durand(-Richard), M.J., 1985, "George Peacock (1791-1858) : La Synthèse Algébrique comme loi symbolique dans l'Angleterre des Réformes (1830)", *Thèse pour le doctorat de l'E.H.E.S.S.*.
- id., 1990, "Genèse de l'Algèbre Symbolique en Angleterre : une Influence Possible de John Locke", *Revue d'Histoire des Sciences,* 43, n°2-3, 129-80.
> Durand-Richard, M.J., 1992, "Charles Babbage (1791-1871) : De l'Ecole algébrique anglaise à la "machine analytique"", *Mathématiques, Informatique et Sciences humaines*, 118, 5-31; "Erratum", 120, 79-82.
- id., 1995, "L'impact des travaux de l'Ecole Algébrique Anglaise dans les journaux scientifiques autour de 1830", *Rivista di Storia della Scienza,* (S.II), 3(2), 119-56.
- id., 1996, "L'Ecole Algébrique Anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance", in (éds) Goldstein, C., Gray, J., Ritter, J., *L'Europe Mathematique - Mythes, histoires, identité. Mathematical Europe - Myth, History, Identity,* Paris, Eds M.S.H, 445-77
> Fauvel, J., Ransom, P., Wallis P. & R., 1991, *Mathematical Tradition in the North of England,* Durham, NEBMA.
> Garland, M. McMackin , 1980, *Cambridge before Darwin, The Ideal of a Liberal Education, 1800-1860*, Cambridge, Cambridge University Press, p. 157, n. 52.
> Gascoigne, J., 1989, *Cambridge in the age of the Enlightenment, Science, religion and politics from the Restoration to the French Revolution*, Camb. Un. Press, Cambridge.
> Jenkins, J., & Jones, D.C., *1950,* "Social class of Cambridge University alumni of the 18th and 19th centuries", *British Journal of Sociology*, 1, 93-116.
> Kline, M., 1972, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* New-York.
> Lemoine-Luccioni, E., 1976, *Partage des femmes,* Paris, Seuil.
> Mac Farlane, A., 1916, "George Peacock (1791-1858)", *Lectures on ten British Mathematicians,* New York,
> MacHale, D., *1985, George Boole, his Life and Work*, Boole Press, Dublin.
> Morrell, J., Thackray, A., *1981, Gentlemen of Science, Early Years of the British Association for the Advancement of Science*, Clarendon Press, Oxford.
> Novy', L., 1968, "L'Ecole Algébrique Anglaise", *Revue de synthèse,* III° S., n°49-52, janv. déc. 1968, 211-222.
- id., 1973, *Origins of Modern Algebra,* Prague.
> Panteki, M., 1987, "William Wallace and the Introduction of Continental Calculus to Britain : A Letter to George Peacock", *Historia Mathematica*, 14, 119-132.
> Pedersen, O., 1963, "The "Philomaths" of the XVIIIth Century England, A study in Amateur Science", *Centaurus,* vol. 8, 238-62.
> Rogers, L., 1981, "A Survey of Factors Affecting the Teaching of Mathematics Outside the Universities in Britain in tjhe Nineteenth Century", *Social history of mathematics*. H. Mehrtens, H. Bos, I. Schneider, eds., Boston, Birkhâuser, 149-64.
> Rouse Ball, W.W., 1889, *A History of the Study of Mathematics in Cambridge*, Camb. Un. Press, Cambridge.
> Salanskis, J.M., 1977, "Souvenirs du peu de découverte (Témoignage sur la recherche mathématique)", *Critique,* Paris, Minuit, n° 359, t. XXXIII, avril 1977, 442-49.
> Sibony, D., 1968, "A propos des mathématiques modernes", in Collectif, *Pourquoi la mathématique ?* Paris, 10-18, 100-31.
> Simon, G., 1988, *Le regard, l'être et l'apparence dans l'Optique de l'Antiquité*, Paris, Seuil, Des travaux.
> Wilkes, M.V., 1990, "Herschel, Peacock, Babbage and the Development of the Cambridge Curriculum", *Notes Rec. Royal Soc. Lond.,* 44, 205-19.
> Yeo, R., 1993, *Defining Science,* William Whewell, natural knowledge and public debate in early Victorian Britain, Cambridge, CUP.