# Introduction générale



pouvait être nié. (1) C'est cette considération qui nous a fait revenir dans la 9ème édition, à la simple marche d'Euclide, en renvoyant aux notes pour la démonstration rigoureuse.

En examinant les choses avec plus d'attention nous sommes resté convaincu que pour démontrer complètement notre *postulatum* il fallait déduire de la définition de la ligne droite une propriété caractéristique de cette ligne qui exclût toute ressemblance avec la forme d'une hyperbole comprise entre ses deux asymptotes. Voici quel est à cet égard le résultat de nos recherches.

*Soit* BAC *un angle donné, et* M *un point donné au dedans de cet angle; divisez l'angle* BAC *en deux également par la droite* AD *et du point* M *menez* MP *perpendiculaire sur* AD*: je dis que la droite* MP *prolongée dans un sens et dans l'autre, rencontrera nécessairement les deux côtés de l'angle* BAC. fig. 274.

Car si elle rencontre un des côtés de cet angle, elle rencontrera l'autre, tout étant égal des deux côtés à partir du point P; si elle ne rencontrait pas un côté, elle ne rencontrerait pas l'autre par la même raison; ainsi, dans ce dernier cas elle devrait être renfermée tout entière dans l'espace compris entre les côtés de l'angle BAC; or, il répugne à la nature de la ligne droite qu'une telle ligne, indéfiniment prolongée, puisse être renfermée dans un angle.

En effet, toute ligne droite AB tracée sur un plan, et indéfiniment prolongée dans les deux sens, divise ce plan en deux parties qui étant superposées coïncident dans toute leur étendue et sont parfaitement égales. La partie AMB du plan total, située d'un côté de AB, est égale en tout à la fig. 275.

*Legendre – Éléments de Géométrie – 1823*

*«… si l'ingénierie didactique est une méthodologie de recherche qui est aujourd'hui en compétition avec d'autres méthodologies, en ce qui concerne l'étude du système classe, elle demeure pour le didacticien un instrument incomparable lorsqu'il s'agit de concevoir et étudier des possibilités de formes de vie un tant soit peu nouvelles. Et concevoir et étudier, même si c'est dans des systèmes didactiques qui relèvent du laboratoire, de nouvelles formes de vie pour l'enseignement et l'apprentissage d'une discipline, est une dimension de la recherche qui reste fondamentale. »*

*Michèle Artigue*
*Ingénierie didactique – 2002*

La complexité croissante de notre société et de son organisation a des répercussions évidentes sur les regards que chacun des acteurs du système éducatif porte sur celui-ci, et en particulier sur ses missions, régulièrement redéfinies, reprécisées.

Cette complexité structurelle de notre société accompagne – et produit - une richesse individuelle, elle aussi croissante, des représentations de chacun bien entendu du réel mais aussi de ses propres possibles, et, plus généralement des mondes individuels ou collectifs dans lesquels chacun évolue.

Ainsi, la pratique du *réseau*, et en particulier de ces jeux conçus d'abord « *pour lui*[1] », procure aux adolescents que sont nos élèves – et donc aux futurs enseignants qui sortiront de leurs rangs – des capacités d'adaptation aux scenarii les plus inventifs, mais aussi les plus complexes, et des expertises d'action ou de stratégie collective[2] remarquables, pour peu qu'ils y trouvent une cohérence interne, et *des mondes à explorer*.

Plein de cette richesse intérieure, nouvelle pour la société, largement démocratisée[3], peuplée d'images parfois extraordinairement soignées, lui-même rompu aux pratiques de l'interaction en temps réel sur ces images et les mondes qu'elles *représentent*, l'adolescent va aussi au lycée, le tiers de son temps environ, et, pour ce qui nous occupe, en cours de Mathématiques. Devant une classe de 1°S ou de TS, certains jours il peut arriver à l'enseignant de s'interroger sur la force interne du système éducatif, et son extraordinaire capacité à canaliser l'énergie d'élèves, pourtant si vivants, qui acceptent de bonne grâce des apprentissages – et surtout des validations - canoniques, en mathématiques, parfois tellement obsolètes[4] en regard des pratiques sociales contemporaines.

Qu'apportons-nous, dans nos cursus scolaires et universitaires, aux lycéens et étudiants d'aujourd'hui ? Plus précisément, pendant les formations dispensées, au-delà des missions premières du système éducatif que sont les transmissions - savoirs, savoir-faire et valeurs - décidées comme actuellement utiles et efficaces pour l'insertion sociale de chacun, quelle part d'enrichissement individuel proposons-nous, dans nos programmes ou nos procédures d'apprentissage : quelle prise en compte de l'apprenant ?

---

[1] Ce qui, si on s'y arrête un instant, invite à une réflexion sur l'évolution des valeurs de l'imaginaire collectif actuel d'une classe importante de la population.

[2] On peut mentionner ces situations programmées pour des rencontres exceptionnelles où la mise en réseau des compétences obtenues par plusieurs centaines d'équipes de joueurs de par le monde est nécessaire pour franchir un obstacle (en général tuer un monstre créé pour la circonstance). Nous ne sommes plus dans la durée – alors que la résolution de la conjecture de Riemann par exemple est intemporelle – mais certainement dans l'accumulation, suivant des règles précises et respectées de chacun, des potentialités individuelles. Et si, une année, le monstre est enfin vaincu (ce qui arrivera aussi à la conjecture de Riemann) quelle réalité donner – et qui les reconnaît – aux compétences nécessaires ? Cette anecdote, proposée en dehors d'un contexte scientifique, illustre la généralité de ce questionnement : qu'y a-t-il de réel en dehors de la communauté des pairs ?

[3] Des richesses équivalentes (plus « réelles » ?) étaient déjà accessibles par les diverses pratiques artistiques individuelles ou collectives. La nouveauté est certainement dans la délocalisation physique de chacun, mais aussi peut-être dans la pratique du nombre, et la complexité collective.qui peut être atteinte … ce qui n'enlève rien aux partitions orchestrales des plus grands auteurs et à leurs interprétations.

[4] Même si des progrès significatifs ont été accomplis ces dernières années dans l'adaptation des programmes aux pratiques quotidiennes de chacun (utilisation des TIC), induisant de véritables ruptures avec certaines organisations scolaires ou pédagogiques antérieures. Cette introduction a toutefois été écrite à une époque où « le problème » de l'épreuve du Bac S – et « le » rend bien compte d'une quasi unicité dans l'esprit et la forme – restait un exemple de caricature d'activité « scientifique » … et le choix grammatical du temps se veut l'expression d'un changement qui semble éminent.

Cette question se pose à nous de manière réflexive et symétrique, en le sens suivant. Nos programmes et projets éducatifs s'articulent sur des thèmes généraux. Nous ciblons par exemple, à tous les niveaux d'enseignement, l'importance d'apprendre à trier[5] l'information. Or nous avons, dans nos unités d'enseignement, des élèves, des étudiants, des stagiaires, qui, eux, devant le champ des possibles si vaste que leur offre la vie sociale actuelle, *trient* selon leurs critères propres, leur implication dans les formations qui leur sont proposées. Cette symétrie entre l'objectif d'enseignement et le comportement attendu – mais produit dans un autre champ[6] – amène le formateur a se poser la question de qui, en définitive, doit apprendre à trier : quels choix vont être retenus par le formateur pour que le formé engage effectivement *du sens* dans sa participation au processus auquel il est *invité* ?

Chacun est convaincu en effet qu'une formation n'est significative que si elle a du sens pour celles et ceux qui la *reçoivent*. Ou mieux, qui la *prennent*. Nous nous sentons en effet très proche de ce vieil aphorisme[7] ésotérique qui veut que « La connaissance n'est pas donnée, elle est prise ». C'est sans doute vrai de la connaissance, de par l'intimité de l'appropriation, mais qu'en est-il alors du savoir[8] ? La question du rapport effectif à une connaissance à partir des savoirs est centrale en didactique[9] et plus généralement dans tout processus d'enseignement ou de formation[10]. Parmi les analyses de la didactique que nous utiliserons, citons l'importance des jeux de cadre pour favoriser la cristallisation d'une connaissance à partir de savoirs, ou encore celle de la dévolution[11].

Le contexte culturel général ambiant dans lequel va essayer de s'immerger ce travail étant ainsi rapidement brossé, abordons le cœur de notre propre problématique.

---

[5] « Trier, manipuler, restituer » sont, selon les directives officielles, les grands axes de la formation initiale, depuis le primaire. En mathématiques, « trier » peut se décliner selon « classer » et « ordonner», ce qui induit deux branches, celle des relations d'équivalence et celles des relations d'ordre, aboutissant plus loin, sur l'algèbre (la gestion du fini) avec ses structures, et l'analyse (la gestion de l'infini) avec ses convergences.

[6] En particulier celui de l'efficacité pour l'accumulation des critères de validation du cursus engagé.

[7] Si on le trouve explicitement dans les Yoga Sutra de Patanjali, c'est surtout parce que ceux-ci sont connus, traduits, et édités. D'une manière générale c'est une position ésotérique méta-culturelle de relation entre le sujet et la connaissance.

[8] Rappelons brièvement la différence généralement faite entre la connaissance qui reste du domaine de l'expérience intime (« on ne peut décrire le goût du lait à quelqu'un qui n'en n'a jamais bu » est un proverbe qui rend compte du champ de la connaissance) et le savoir qui est transmissible, du domaine public. La démarche scientifique est une des démarches qui propose de dépersonnaliser et décontextualiser l'expérience intime, dans des domaines ou cela a du sens (reproductibilité, inter-subjectivité), pour lui donner une valeur objective, transférable. Tous les auteurs s'accordent sur l'importance de l'écriture (processus de virtualisation du présent chez Pierre Lévy) dans cette démarche. On notera le glissement du projet scientifique qui de l'objectivité initiale, par la [physique] quantique en particulier, s'est déplacé vers ce que le physicien Bernard d'Espagnat appelle l'inter-subjectivité. La note 21 est peut être un exemple possible de « connaissance » de la didactique : quand la culture professionnelle accepte d'être miscible avec la culture individuelle.

[9] Où le vocabulaire est différent, car, nécessairement formalisé pour accéder au statut de science : penser par exemple à la modélisation de l'enseignant dans l'approche praxéologique [Yves Chevallard] avec sa forme de quadruplet (objectif, tâche, technique, technologie) et reprendre le questionnement à la fin de la note 2.

[10] Situation où vient interférer le rapport à l'évaluation, et la pertinence de celle-ci. La question se pose avec plus d'insistance dans les cas de micros modules où le sens s'inscrit dans l'interaction avec d'autres modules et donc dans la durée, alors que cela peut ne pas être le cas de l'évaluation d'un module isolé.

[11] La *coutume* universitaire voudrait que l'on cite ici respectivement, en référence, Régine Douady et Guy Brousseau comme fondateurs des concepts mentionnés. Nous pointons cette *coutume* pour remarquer qu'il y a peut-être un signe de maturité d'une science – capacité à sortir du cercle des pairs – à considérer les concepts de base comme suffisamment diffusés et partagés pour ne pas avoir à être resitués dans l'histoire de leur propre genèse : en traçant une droite passant par deux points, il ne vient à aucun enseignant l'idée de commenter « Par Euclide, Livre I, Demande 1, je trace *la* droite (AB) », ceci, même si aucun de ses élèves ne connaît Euclide. Certes nous n'ignorons pas que d'autres critères (d'évaluation individuelle en particulier qui ne s'applique plus à Euclide) sont aussi à l'origine de la coutume.

Dans chaque domaine des mathématiques, nous disposons d'exemples d'affinement progressif des concepts ainsi que de ruptures épistémologiques[12]. Le cas de la géométrie – et en particulier de l'émergence des géométries non euclidiennes (G.N.E. dans la suite) – s'inscrit dans ce double processus, avec cette spécificité forte que l'évolution des concepts est significativement lié à la distance prise par les mathématiciens avec leurs propres représentations des notions premières (point, droite, plan) engagées dans le monde sensible :

> *« Pour Hilbert, et pour tous les mathématiciens me semble-t-il, l'énoncé des axiomes de la géométrie se fonde sur des propriétés intuitives des points, droites, etc. On pourrait dire que c'est la position d'Euclide et on peut interpréter, en partie, l'histoire des débats sur les fondements de la géométrie comme l'histoire d'une défiance de plus en plus grande vis-à-vis des vérités considérées comme intuitivement évidentes, mais qui aboutit à la constatation qu'on ne peut s'en passer totalement ».*
> *Gilbert Arsac[13].*

C'est en découvrant la richesse épistémologique de cette évolution dans différents ouvrages ou articles relatifs à cette histoire que peu à peu émergea l'idée d'une formation aux G.N.E. *pour* les futurs enseignants, *avec* des outils contemporains.

- *Pour* les futurs enseignants, c'est-à-dire une formation orientée d'abord vers la mise en évidence et le parcours des représentations de chacun afin d'interroger cette connaissance intime que l'on a de la géométrie (ou encore ses propres certitudes géométriques) pour ouvrir à l'écoute et donner du sens[14] au discours didactique de la formation qui leur est dispensé. L'idée est de précipiter (au sens chimique du terme), par cette expérience, les problématiques didactiques dégagées en formation dans un rapport à soi-même au moment charnière où l'on passe d'un statut d'étudiant à celui de professionnel afin de les rendre *vécues* de l'intérieur.
- *Avec* des outils contemporains, c'est-à-dire une formation organisée dans le contexte culturel ambiant, construite, pour l'essentiel, sur l'image et sa manipulation en temps réel, afin de centrer les actions sur l'utilisation des savoir-faire décrits ci-dessus, sinon des stagiaires eux-mêmes, du moins supposés des élèves en général (aisance dans l'exploration d'univers nouveaux, intérêt pour des scenarii *a priori* imprévisibles comme le sera l'exploration elliptique).

Il s'agit donc de placer des stagiaires[15] PLC2-Maths dans une formation - nécessairement rapide[16] compte tenu des nombreuses contraintes de tous types – dans laquelle les savoirs disciplinaires ne seraient pas des objectifs premiers en soi, mais des outils pour

[12] Si quelques ruptures (de méthodes, de point de vue) sont bien connues et répertoriées comme telles, dans d'autres cas, on peut aussi observer que la distinction en progrès « continu » et rupture relève parfois plus du point du vue sur l'évolution que d'une *réalité* objective, Tout comme il existe plusieurs façons de construire R par exemple (avec les suite de Cauchy, ou les coupures de Dedekind), de même certains historiens préfèrent rendre compte de l'histoire en mettant l'accent sur les micro progrès qui convergent vers un concept tandis que d'autres rendent compte de la coupure que l'émergence du concept implique.

[13] « L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée » - Édition ALEAS - p 22.

[14] Nous nous situons donc, à notre tour, dans ce questionnement de formateur qu'Aline Robert a déjà balisé dans son fascicule : « Comment donner à boire à ceux qui n'ont plus soif ? » (IREM – Paris 7)

[15] Au moment où ce travail a été accompli, dans le système de recrutement français des enseignants, les étudiants reçus à l'épreuve théorique du CAPES sont l'année suivante *stagiaires* au sein d'un IUFM dans une formation dite « PLC2 » (Professeurs de Lycées et Collège en 2° année de formation). Outre un stage en responsabilité à l'année dans un établissement scolaire avec une classe, ils suivent différents modules de formation (générale, disciplinaire). C'est dans la partie disciplinaire de cette formation que s'inscrit le travail entrepris ici.

[16] Si cette rapidité est *a priori* – et restera ensuite *a posteriori* – un problème pour nous, elle s'inscrit elle aussi dans le contexte culturel que nous essayons de prendre en compte. Néanmoins tout le monde s'accorde pour dire que l'apprentissage n'a aucun rapport avec le surf et le zapping multimédia sur les champs du savoir.

placer les stagiaires dans un contexte d'homologie didactique, dans lequel ils vont tout d'abord :

- se trouver, comme des élèves de collège, en situation d'*apprentissage empirique* de « la » géométrie (il s'agira de géométrie hyperbolique, le singulier renvoyant à un référent implicite, standard incontournable, comme dans le cas scolaire).
- devoir exprimer leurs représentations.
- s'apercevoir qu'elles peuvent être erronées et essayer de les corriger.

Pour se trouver en situation d'apprentissage empirique d'une géométrie, il convient de disposer d'instruments (règle, équerre, compas) de cette géométrie et les manipuler. Pour cela, nous allons utiliser la géométrie dynamique, et plus précisément le micro-monde de Cabri-géomètre[17]. Si les premières manipulations hyperboliques vont naturellement interroger certaines représentations, on peut penser que celles-ci vont rapidement et facilement se réajuster au contexte plus général que le simple environnement euclidien : nous serons alors dans ce qui s'appelle classiquement depuis la « géométrie absolue de Bolyai[18] ».

C'est avec les manipulations elliptiques que des représentations plus personnelles car plus ancrées - en particulier sur les symétries orthogonales, construites depuis la plus petite enfance sur l'archétype du pliage[19] et régulièrement validées depuis - vont être profondément bousculées. Et c'est plus spécifiquement ici, autour de cette situation elliptique et de ses conséquences, que nous faisons l'hypothèse d'une ouverture, réellement intériorisée, aux problématiques véhiculées par la didactique.

Comme en classe, et donc toujours dans cet esprit d'homologie, la formation se poursuivra par un recul conceptuel sur ce qui a été pratiqué alors. Ce sera, une nouvelle fois l'occasion d'ouvrir encore un peu plus les représentations en abordant les théorèmes absolus sur les droites remarquables non seulement des triangles, mais aussi des trilatères. Enfin elle se terminera, là encore par homologie, par des activités que l'on pourrait dire « d'application » dans lesquelles de nouveaux résultats permettront encore d'explorer d'autres interprétations de la particularité elliptique tout en les liant aux propriétés euclidiennes (implicites chez Euclide) qui lui sont, d'une certaine façon, opposées.

---

[17] Au moment de la réalisation de ce travail, Cabri-géomètre (utilisé dans sa version Cabri II 1.1.8 et pas dans la version ultérieure Cabri II+ intervenue après l'expérimentation) est le seul logiciel assez robuste pour effectuer aisément (avec un usage abondant de macros) aussi bien des figures comme celles du chapitre 1 (utilisation systématique de la géométrie différentielle) que les barres de menu elliptique du chapitre 3 (usage parfois subtil de l'implémentation dynamique des objets utilisés) et celles sur les faisceaux du chapitre 4 (et d'une manière générale, la gestion de l'infini propre à ce logiciel). Depuis la mise en place de ce travail, les autres logiciels de géométrie dynamique n'ont toujours pas la robustesse du moteur interne de Cabri et la gestion des barres de menu personnalisées, pour entreprendre le type de formation proposée ici.

[18] D'une part car c'est à Bolyai que l'on doit l'expression « géométrie absolue » (1832) pour désigner une géométrie qui ne décide pas (entre une ou plusieurs) des parallèles à une droite passant par un point, et d'autre par « absolue de Bolyai » car depuis « absolue » signifie « qui ne traite pas de la question » alors que dans la version « Bolyai », la géométrie elliptique (aucune parallèle) est implicitement éliminée.

[19] Mais aussi de la verticalité liée à la marche, d'où l'intimité de ces représentations qui sont aussi liées au corps et à ses mouvements : quand certains concepts s'étiolent, ces représentations profondes, jamais formulées, peuvent tout d'un coup s'exprimer.

### Objectifs et outils de formation

Le lecteur peut déjà apercevoir, dans ce plan de travail, comme une inversion fonctionnelle entre les savoirs et les processus d'apprentissage. Traditionnellement les savoirs sont des objectifs[20] et les processus d'apprentissage des moyens, des outils. Dans la façon dont nous envisageons la présentation des G.N.E. à des PLC2, les savoirs (même en cours d'acquisition) sont des outils pour dégager des connaissances sur les apprentissages, principal objectif de la formation. Bien entendu les choses ne sont jamais aussi binaires et s'inscrivent dans une complexité plus subtile de circulation entre plusieurs pôles. Ainsi, au sein de cet objectif global de formation se trouvent nécessairement quelques niches d'objectifs de type purement disciplinaire, non seulement pour des raisons propres aux mathématiques (culture historique, difficulté épistémologique, rupture conceptuelle) mais aussi parce que comme outils d'investigation, les savoirs doivent eux-mêmes se construire selon leurs propres règles (la démarche hypothético-déductive), et s'affiner : d'où des moments purement « de mathématiques » pour construire les outils d'un parcours au sein d'activités qui visent à la réflexion sur l'apprentissage en général et les représentations en particulier.

Aussi, plus que d'inversion entre les savoirs et les processus d'apprentissage, préférons-nous parler de circulation fonctionnelle au sein des sommets du triangle didactique[21] qui nous paraît moins réducteur, plus à l'image de la complexité mise en œuvre. Nous voyons dans cette formation une illustration opportune de cette circulation qui n'est peut-être pas aussi facilement accessible dans d'autres organisations d'enseignement, plus élémentaires.

Nous sommes sensibles à cette question de la circulation fonctionnelle comme alternative à un regard ou un type de discours qui, dans son propre déroulement, peut construire une dualité effective entre deux notions, et cette sensibilité est probablement une

[20] Même s'il faut bien dessiner, il ne nous paraît pas innocent que le triangle didactique ait été – et depuis soit généralement - dessiné comme une pyramide vue de face dont le sommet est le savoir. De fait, la base devient alors – même sans le vouloir - l'ensemble des processus dont l'interaction permet son émergence.

[21] Le triangle didactique « originel » est composé de trois sommets : le savoir, l'élève, et l'enseignant. Il reprend ainsi, avec sa problématique propre, la trilogie philosophique classique du connu, du connaisseur et du processus de connaissance. Et même si les anciens ne faisaient pas de didactique au sens contemporain (entre autre, parce qu'un enseignement de masse n'existait pas), on notera avec intérêt que ce triangle existe depuis qu'il existe des traces de la réflexion humaine : on le retrouve dans l'un des plus anciens textes, le Rig Veda indien (généralement évalué à -3000 ans dans sa tradition orale), sous la forme de Rishi (le sage, le connaisseur), Devata (l'esprit, le processus de connaissance) et Chandas (l'objet de connaissance). D'un certain point de vue, cette appropriation de la triade cognitive par la didactique (dans son triangle) est déjà une méta-transposition de savoirs savants (savoirs ésotériques par exemple réservés à une élite) vers des savoirs « à enseigner » (savoirs sociaux, version publique des précédents, transmissibles dans les universités). Dans le RigVeda, ces trois états *séparés* proviennent d'une même source, la Samhita. Il est alors mentionné que la Samhita peut être atteinte par un individu quand ces trois fonctions *distinctes* ne sont plus séparées (en lui). Et, si chaque civilisation a son propre vocabulaire et ses propres représentations, nous avons envie de dire avec ce vocabulaire là que, dans son travail, tout comme *l'artiste accompli* en concert, le chercheur peut, dans quelques moments privilégiés, de découverte ou de rédaction, expérimenter parfois la Samhita : c'est aussi un des bonheurs individuels en réalisant un travail comme celui présenté ici qu'au détour d'un théorème absolu, d'un commentaire d'activité, Rishi, Devata, et Chandas deviennent trois fonctions distinctes d'un état intérieur qui n'est plus séparé. Une de nos hypothèses implicites – i.e. propre à notre scénario d'enseignant [Claudine Blanchard Laville] – dont nous sommes conscient, est que cette circulation mentionnée dans le texte principal, qui pour nous existe (devrait exister) toujours du côté de l'enseignant même si elle n'est pas prise en compte dans les modèles standards, non seulement favorise les prises de sens, mais peut éventuellement être un moyen cristallisant la non séparation des sommets du triangle didactique, quintessence du processus d'apprentissage [Socrate], quand l'enseignant, l'enseigné, et l'objet d'enseignement, temporairement, sont confondus.

des explications[22] qui fait que ce travail est ainsi rédigé, à la fois mêlant le point de vue de la formation avec celui du savoir transmis, mais aussi, assez régulièrement, brisant les canons du discours linéaire mathématique, utilisant trop tôt un terme de vocabulaire, une notion[23].

La construction de la dualité est souvent présente, parfois de manière subtile, simplement par exemple dans l'intention d'un descriptif. Par exemple le DEA dans lequel nous avons été formés était intitulé « Didactique des disciplines – option mathématique ». Cet intitulé a sa pertinence propre[24], celle qui consiste à dire d'abord ce qu'est la didactique, et ensuite[25] ce qu'elle a de spécifique quand elle s'applique aux maths. Cette structure formelle, qui peut se voir – se vivre – comme une inclusion (dans la grande famille des parallélogrammes, nous sommes les rectangles) est tout aussi fortement porteuse de dualité (justement parce que les losanges ne sont pas pareils[26]) : l'induction de la note précédente, mise en place pour décontextualiser la problématique de l'enseignement (de la discipline qui, à l'origine, a su poser cette réflexion de manière institutionnelle) conduit à présenter la didactique, *et* ce que l'on en fait en mathématiques, autrement dit à construire la dualité comme représentation initiale de l'apprenant. Et nous ne sommes pas entrés dans ce qu'on pourrait appeler *la tradition* de cette dualité. Voyons comment.

Nous avons rencontré « La didactique » alors que nous pratiquions la géométrie dynamique en classe (au lycée) depuis 5 années scolaires et les représentations que nous nous sommes construites ont tout de suite été dans ce champ de la géométrie dynamique. Depuis, l'intérêt croissant pour la didactique s'est essentiellement tourné vers la pratique des T.I.C. et en particulier – comme changement de support, aussi bien d'expression et que de réflexion – sur l'utilisation de la géométrie dynamique. Cette pratique antérieure de Cabri, et son utilisation pour nous construire des représentations fortes en « didactique des disciplines » a eu comme effet que « didactique » et « mathématiques » n'ont jamais été deux pôles vraiment (longtemps) distincts dans l'expression « didactique (des)[27] mathématiques » ou que quand ils le sont, effectivement, parfois, alors cette circulation s'installe entre les pôles du triangle didactique, fonctionnant comme des échanges de pions dans l'atome d'hydrogène[28] : ce sont des réactions fortes, comme construites et vivifiées dans et par la pratique de terrain de Cabri.

---

[22] Expliquer n'est pas justifier : il s'agit juste de rendre compte d'un point de vue, et de témoigner de la conscience que l'on a que ce point de vue puisse ne pas être partagé.

[23] Un peu comme dans une symphonie quand les thèmes du quatrième mouvement apparaissent partiellement, de manière éphémère, au détour d'un accord, parfois à la limite de la consonance actuelle, pour annoncer le thème final, mais également pour lier [en musique les émotions, ici les représentations] au delà du temps linéaire, ce qui est transmis dans l'instant : voir la formation comme une symphonie et son compte rendu une partition, car si former est un métier, la formation est faite par des hommes, et vivre [une formation] reste un art.

[24] Qui s'inscrit aussi clairement dans d'autres champs « extérieurs », de type administratifs, comme le regroupement d'équipes …pour maintenir des enseignements par exemple.

[25] On notera l'induction forte sous-jacente à cette approche si on sait que, historiquement, la *didactique française* – pour reprendre une terminologie internationale répandue – est née des mathématiques (Brousseau, Chevallard, etc.) pour s'en extraire (avec comme effet secondaire le trop célèbre « référent bondissant »), s'étendre, et – pour ce qui nous concerne – y revenir.

[26] Nous avons mentionné la « dévolution » qui est un concept méta-disciplinaire et le « jeu de cadres » qui est probablement plus attaché à la spécificité des mathématiques.

[27] L'usage de cette préposition en français, alors que d'autres langues ont un génitif – éventuellement concaténé au mot principal (en grec) – a parfois été détourné de cette façon. Nous nous souvenons ainsi de J.P. Sartre qui, dans son essai sur « la transcendance (de) l'ego » (1937), mettait le « de » entre parenthèses pour traduire cette concaténation porteuse d'unité, et ne le mettait plus pour signifier une relation, une dualité, entre un nom et son complément déterminatif. On voit sur cet artifice que nous sommes relativement dépendant des représentations que la grammaire de notre langage peut véhiculer malgré ce que l'on cherche à exprimer.

[28] Le lecteur aura eu la délicatesse de choisir du deutérium pour la cohérence du propos.

*"Traduire d'anciens savoirs dans de nouvelles technologies intellectuelles revient à produire de nouveaux savoirs. L'illusion consiste à croire qu'il y aurait des "connaissances" ou des "informations" stables qui pourraient changer de support, être représentées autrement ou simplement voyager tout en gardant leur identité. Illusion car ce dont s'occupent les théories de la connaissance : savoir, information et signification sont précisément des effets de supports, de connexions, de proximités, d'interfaces."*[29]

Pour rendre compte de l'état d'esprit dans lequel nous envisageons d'aborder les enjeux de la géométrie dynamique, éventuellement comme « nouveaux savoirs » au sens précédent de Pierre Lévy, détaillons un peu plus autour de *l'énergie* généralement portée dans ce texte par l'expression « didactique des mathématiques ». Nous venons de dire qu'il ne s'agit pas vraiment d'une rencontre, ni même d'une collaboration, sur un chemin donné, balisé, entre deux entités, mais bien d'une circulation, phénomène existant *en soi*, même si sa source, puis son existence sont nourries[30] de la proximité de deux pôles distincts.

De *deux pôles distincts* au sens usuel du terme (les mathématiques et la didactique) bien sûr, mais aussi au sens de l'analyse de Pierre Lévy : ce qu'il appelle le pôle de l'écriture (le savoir savant, le « sommet » du triangle didactique) et le pôle informatico-médiatique[31] (pour nous les deux autres sommets, la relation à l'apprentissage). Pour lui, ces deux pôles ont[32] :

• *pour forme canonique du savoir*, le premier la théorie (fondation, exposé systématique) et le second la simulation, la modélisation.

• *pour critère dominant*, le premier la vérité (selon les modalités d'objectivité, d'universalité), le second l'efficacité et la pertinence locale.

Ce que nous allons pratiquer de la didactique des mathématiques est *dans* cet échange constant entre le pôle de l'écriture (les définitions, les nouveaux concepts les théorèmes hyperboliques, elliptiques, absolus, leurs preuves) et le pôle T.I.C. de la modélisation et de simulation avec Cabri (explorations, conjectures, vérifications) : on le voit, notre thème d'étude s'y prête tout à fait.

Mais on aura aussi compris que ce n'est pas tant parce que notre thème d'étude est en phase avec cette analyse que nous prenons ce point de vue sur la didactique, mais probablement bien l'inverse : c'est parce qu'il est en phase avec la représentation que nous nous faisons de la circulation des pôles au sein du triangle didactique que nous avons utilisé[33] ce thème de travail comme champ d'illustration de ce regard. C'est probablement notre force : nous pensons avoir sur ce thème une certaine efficacité qui mérite d'être exposée. C'est assurément notre faiblesse : celle d'une analyse bien spécifique, éventuellement parfois pertinente, mais certainement dans un champ d'investigation bien précis et donc limité : nous n'avons en ce domaine qu'une assez faible[34] propension à l'induction messianique.

---

[29] *Les technologies de l'intelligence* – Pierre Lévy - Point Science – 1993 – p 208

[30] A l'image de la turbulence en physique

[31] Dans le même ouvrage. Le terme n'est pas particulièrement agréable ; il date de 1993. Nous parlerons désormais de T.I.C. puisque c'est la terminologie usuelle *dans le cadre qui nous intéresse* (on pourrait trouver des nuances, c'est évident). Voir aussi Cyberculture – Pierre Lévy – Ed. Odile Jacob - 1997

[32] Voir le tableau proposé en annexe à ce chapitre.

[33] Utilisé plus que choisi, car comme nous l'avons vu, compte tenu de nos propres orientations de travail, ce thème s'imposait à nous pratiquement de lui-même.

[34] Même si, comme chacun, nous croyons à ce que nous faisons, et par exemple que ce point de vue sur une didactique construisant une circulation signifiante entre le pôle de l'universalité et celui de la modélisation est porteur de sens pour l'avenir des processus de formation (en particulier à distance).

On pourrait ainsi penser, entre autres analyses, que cette approche est un bel exemple de refus patent de dépersonnalisation des représentations[35]. Que cette non séparation claire de deux pôles relativement antagonistes (par leurs critères, par leurs propres rapports au savoir) ne satisfasse aucun des deux pôles est assez incontournable. Tout comme l'avènement du pôle de l'écriture n'a pas anéanti celui de l'oralité[36], l'émergence d'un nouveau pôle, actuellement en construction, ne détruira pas le pôle de l'écriture, ni ses valeurs propres. La didactique aura toujours son « savoir savant » référent (fondateur), elle continuera à se construire en science, donc à disposer de son propre savoir savant[37], ses propres critères d'objectivité, ses propres recherches à l'universalité. Simplement, de notre point de vue, à l'image de la découverte des G.N.E. la simple pratique citoyenne des T.I.C. construit un nouveau champ d'investigation pour la didactique qui n'est plus dans les mêmes valeurs que son pôle de référence. Et, au moins au moment où ce pôle se construit, un exemple d'étude du comportement didactique à la charnière entre les deux pôles nous semble avoir une pertinence *intrinsèque* propre. Et – au moins l'histoire nous apprend-t-elle cela – nous n'avons pas besoin d'un Hilbert[38] de la didactique pour comprendre par avance que le champ complet de la didactique ne se plonge pas, isométriquement, dans cette approche-là.

Revenons aux spécificités de la formation elle-même. Nous nous adressons à de futurs enseignants, concernés – et curieux – par la question des processus d'apprentissage, d'où l'objectif. En même temps nous allons travailler avec des personnes ayant un bagage et des pratiques mathématiques qui viennent juste d'être reconnus par leur admission au CAPES. On peut penser qu'elles peuvent encore être (redevenir[39]) curieuses et concernées par les objets mathématiques pour autant que ceux-ci ont un rapport avec leur future pratique enseignante, d'où les moyens : nous faisons l'hypothèse que ces moments de mathématiques - où il s'agira de démontrer des théorèmes absolus de géométrie élémentaire du triangle - peuvent être, dans le contexte que nous avons décrit, de véritables situations a-didactiques pour lesquelles l'objet mathématique temporellement étudié provoque une véritable dévolution, l'éventuelle étrangeté[40] de la situation participant elle-même à cette dévolution. Là encore, il n'y a aucune systématisation possible : au cours de ces séances, après quelques activités significatives où ce schéma peut fonctionner, la situation évoluera naturellement d'elle-même, pour chacun, en fonction d'abord de ses propres difficultés : mathématiques pour quelques uns, plus conceptuelles pour d'autres (comme se trouver en situation d'apprentissage empirique), psychologiques parfois (la surprise de ses propres représentations) qui déboucheront[41] vers des représentations individuelles de la formation elle-même, sur lesquelles, même si on peut

[35] Les mots sont là, témoins à charge irréfutables contre l'auteur : nous avons relevé un « *réactions* fortes », imprégné de rapport personnel, alors qu'il aurait pu utiliser le terme physique approprié *interactions* fortes, (plus porteur pour son discours) ou encore [provocation ? naïveté ?] ce « *l'énergie* généralement portée », comme une gestation individuelle revendiquée.alors qu'une analyse distanciée aurait su, simplement, se référer à P. Lévy, sans colorer ce rattachement d'autant d'affects. On le voit, l'auteur se dévoile plus qu'il n'expose.

[36] Dont les formes canoniques du savoir - toujours dans l'analyse de Pierre Lévy - sont celles du récit et du rite, et les critères dominants sont la permanence, la conservation, mais aussi la signification (dans sa dimension émotionnelle).

[37] Par exemple actuellement, les modèles de l'enseignant, organisés sur la praxéologie.

[38] Se reporter au théorème évoqué en I.3.f.

[39] Réveiller la soif, dont on a déjà constaté – avec Aline Robert – qu'elle a souvent été tarie soit par la réussite au concours, soit par l'entrée dans la vie professionnelle.

[40] Plus que complexité. En pratique, dans la formation que nous envisageons, il n'y aura strictement aucune difficulté technique. Cela n'empêche pas que d'autres difficultés surviendront.

[41] A nouveau, nous ne classons pas les stagiaires. Il est clair qu'il y a, ici aussi, un mouvement et qu'il s'agit de phases par lesquelles chacun passe avec plus ou moins d'accroche selon sa personnalité.

toujours envisager une typologie générale - basée sur celle des scenarii d'enseignants par exemple - il est délicat de se prononcer *a priori* avec finesse.

### Conceptualisation des outils de formation

Les lignes directrices de cette formation, et les regards portés sur elle, étant précisés, disons un mot maintenant sur la structuration de ces outils, autrement dit sur la démarche mathématique sous-jacente à toute cette formation. Il était important pour nous de mettre en place une présentation

- *synthétique*[42] des G.N.E. (i.e. qui inclue aussi bien l'hyperbolique que l'elliptique),
- *non technique* pour être en phase avec les activités exploratoires où les résultats sont conjecturés spontanément et rapidement, cela signifie en particulier sans l'utilisation massive de la trigonométrie ou des complexes comme on le voit régulièrement – voire assez systématiquement - dans les ouvrages anglo-saxons par exemple.
- *pertinente en terme de séparation*, c'est-à-dire qui sache donner tout son sens à la particularité euclidienne (et rendre compte des difficultés ontologiques rencontrées par les mathématiciens) quand on séparera les géométries.

Pour cela, nous avons retenu de placer notre travail sous la référence mathématique de l'axiomatique de Bachmann, dans sa version algébrisée. Outre qu'elle remplit parfaitement le cahier des charges précédent[43], et qu'elle est « objectivement » séduisante, cette axiomatique a aussi l'avantage d'être construite autour des symétries orthogonales, et donc, de ce point de vue, en conformité à l'utilisation actuelle des transformations comme on les voit au collège en particulier.

Quand on trouve ce que l'on cherche, on peut avoir tendance à teinter ce résultat d'une certaine pertinence intrinsèque, comme canonique, de notre propre schéma de réflexion : nous avons cherché – chez les mathématiciens s'entend – une présentation synthétique qui sache séparer les géométries *parce que*, dans notre propre représentation – construite par des lectures variées qui disent toutes la même chose – ces géométries sont *objectivement* séparées : en elliptique deux droites sont toujours sécantes, en hyperbolique il existe des couples de droites sans point ni perpendiculaire en commun. Même si nous anticipons un instant sur certaines conclusions, le lecteur pourra s'amuser à voir ici ou là dans le texte quelques allusions à un revirement de situation car avec le temps, avec la perspicacité – et la patience – de Daniel Perrin, nous avons appris à *voir autrement* ces deux géométries-là. Alors, constater combien elles sont proches l'une de l'autre, pour peu qu'on sache déplacer notre point de vue est non seulement, en soi, une révélation géométrique (probablement pour beaucoup d'autres personnes) mais également une belle leçon d'homologie de la formation. En voulant mettre en évidence l'importance des représentations de chacun dans sa façon d'enseigner, en particulier chez les stagiaires, nous avons appris nous même que cette propre présentation des G.N.E. séparées en trois grandes familles est aussi l'expression d'une certaine représentation de la géométrie du formateur. Ce point sera repris en fin de parcours, mais nous voulions mentionner ici cette piste de lecture possible de certains paragraphes pour illustrer l'effet de la circulation entre les pôles fonctionnels de la formation… y compris ceux de son évaluation.

---

[42] Ce premier point était suffisamment important pour que l'auteur de ces lignes s'interroge à voix haute sur le sens véhiculé par cette importance d'unicité synthétique : de quel regard intérieur sur les mathématiques est-il l'expression ?

[43] Même si certaines démonstrations ne sont pas simples compte tenu, pour une plus grande généralité, de la pauvreté initiale de l'axiomatique.

### Particularité de la manipulation dynamique sur ces géométries

Pour que les élèves puissent manipuler les objets de base de la géométrie euclidienne on leur demande de se procurer des outils de dessin (règle, équerre, compas). De *dessin*, car traditionnellement on dessine sur le support papier-crayon, même si en mathématiques, on cherche à ce que les élèves prennent conscience[44] que les dessins géométriques qu'ils réalisent sont l'expression de propriétés géométriques qui lient les objets de base dessinés. C'est toute l'articulation, largement explorée dans la recherche en didactique depuis l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique, entre dessin et figure[45]. Ces recherches montrent comment l'utilisation d'un support dynamique donne sens aux propriétés géométriques (par exemple de concours ou d'alignement) en les découvrant comme invariants[46] : ce seront des procédés de ce type que nous mettrons en œuvre pour faire découvrir les propriétés des faisceaux de droites.

Nous allons donc fournir aux stagiaires des barres de menus hyperbolique, puis elliptique, et d'autres plus spécialisées afin d'explorer la géométrie. Toutefois, à la différence du support papier crayon où les instruments sont séparés du support, dans une simulation logicielle, les outils de construction et le support ont des structures identiques[47] et l'utilisateur agit de manière dynamique aussi bien sur les uns que sur l'autre[48]. Alors que dans le cas euclidien la situation ne pose pas de problème, de par un transfert assez naturel des représentations, on peut s'attendre – en particulier parce que ce transfert-là n'existera pas – à ce qu'elle soulève des interrogations pour une simulation, dans un modèle euclidien, d'une géométrie non euclidienne.

Bien entendu, pendant le temps de formation, nous serons attentifs à ces interrogations, mais avant cela, nous poserons nous-même quelques réflexions générales sur les différents sens que l'on peut donner à ces capacités d'implémentation des G.N.E. dans un logiciel de géométrie dynamique en pointant ses succès[49] et les progrès qu'on pourrait attendre d'une plus grande conceptualisation de la géométrie dynamique comme objet d'étude.

---

[44] A partir de la deuxième année de collège en France

[45] Dont l'une des premières études est : *Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique*. Colette Laborde – Bernard Capponi (1994) :RDM 14.

[46] D'autres études (recherche institutionnelle, mais aussi les expérimentations des stagiaires IUFM effectuées dans le cadre de leurs mémoires professionnels dont est extrait la remarque suivante) montrent comment l'utilisation en analyse de la géométrie dynamique contribue à enrichir rapidement les représentations sur les propriétés globales de fonctions (monotonie, etc.) : cette fois le mouvement n'est plus utilisé pour illustrer un invariant, mais au contraire pour mettre en évidence une propriété dans le mouvement (et peut-être construire de nouveaux savoir au sens de Lévy) : par exemple pour étudier les variations de $x$ et de $x^2$ sur un intervalle comme $[0, 3]$, les élèves voient et retiennent que « $x^2$ double $x$ en 1 » pour reprendre l'expression d'un élève de seconde.

[47] C'est l'origine même du traitement informatique : les données et les actions sur ces données sont stockées de la même manière.

[48] Certes, dans l'environnement papier, on fait des pliages, des découpages, ou des déplacements avec des calques. Il y a donc aussi une possibilité d'agir sur le support, mais sans commune mesure avec l'action sur une *figure* de géométrie dynamique, en manipulant ses objets de base de manière individuelle.

[49] Et certaines figures, dès le chapitre 1, mais dans les suivants également, de ce travail attestent d'une efficacité parfois insoupçonnable avant leurs réalisations concrètes.

Réalisation des barres de menu - Organisation de la rédaction de ce travail

Le compte rendu de la réalisation des différentes barres de menu sera naturellement pour nous l'occasion d'un parcours plus général de ces géométries que ce qui peut être abordé en formation et l'occasion de quelques détours vers d'autres barres de menu plus succinctes d'autres modèles (y compris de la géométrie affine ou euclidienne). Dans leur rédaction, les chapitres présentant les barres hyperbolique (chapitre 2) et elliptique (chapitre 3) restent centrés sur des problématiques de formation, même si, clairement, le contenu déborde (parfois largement) le cadre d'une première approche de ces géométries[50]. Le lecteur trouvera ainsi quelques pistes de présentation différentes[51] de celles que nous avons choisi d'utiliser pouvant inspirer d'autres organisations de formation. Ce parcours, plus général que celui strictement « utile » pour la formation, de ces géométries se traduit en particulier par un volume rédactionnel plus important d'une première partie « théorique » de mise en place des différents outils, par rapport à la partie qui va rendre compte de l'expérimentation elle-même.

Puisqu'il s'agit de réaliser des outils robustes de construction géométrique, on ne sera pas surpris de trouver dans ces chapitres des discussions sur les choix à effectuer pour que ces constructions soient opérationnelles dans tous les cas (parfois un maximum[52] de cas seulement). Pour fixer les idées, là où l'inverse d'un point par rapport à un arc de cercle (une droite hyperbolique) semble suffire pour construire une droite perpendiculaire à une droite donnée, nous serons amené à complexifier cette figure pour que la construction existe quand le point est sur l'arc d'inversion sinon on ne pourrait construire une perpendiculaire à une droite issue d'un point de cette droite.

Le plan de rédaction reprend, dans son ensemble, la structure de la formation. Ainsi après ces deux chapitres sur la mise en place de ces barres de menu, vient un chapitre plus théorique qui replace ces géométries dans un contexte algébrique unificateur, celui, on l'a dit, de l'axiomatique de Bachmann. La rédaction de ce chapitre 4 est l'occasion de présenter de manière largement illustrée, les principaux éléments de cette axiomatique peu connue en France, depuis ses fondements jusqu'au théorème fondamental du plongement de toute géométrie de Bachmann dans un plan projectif métrique, en passant par les axiomes de séparation des géométries. D'un point de vue constructif, cette axiomatique permet la réalisation de quelques macros supplémentaires fondamentales[53] qui vont permettre – nous retournons alors en formation - d'illustrer, dans le cas hyperbolique, l'extension des théorèmes sur les droites remarquables du triangle aux droites remarquables du trilatère.

---

[50] Par exemple si la construction uniquement géométrique des pavages réguliers hyperboliques reste assez technique, nous proposons des figures qui permettent, en manipulation directe, de vérifier qu'il existe plusieurs types de carrés, de pentagones ou d'hexagones réguliers réalisant, chacun, le pavage du plan.

[51] On peut déjà citer une approche « différentielle » du cercle hyperbolique, une utilisation de la démarche historique de Bolyai pour introduire les horicycles par des propriétés d'angles alternes internes.

[52] En géométrie dynamique, puisque l'on veut embarquer une construction unique dans une seule figure – problématique qui n'existe pas dans le support statique de l'environnement papier-crayon où au contraire on sépare les cas à traiter – on peut rencontrer certaines situations pour lesquelles les constructions peuvent n'être que génériques, c'est-à-dire fonctionner dans tous les cas sauf quelques situations isolées bien identifiées. Dans ce cas, les choix effectués pour les constructions génériques permettent de placer ces situations à la marge de l'utilisation, en particulier en s'arrangeant pour qu'elles soient, de fait, non accessibles à la manipulation directe d'objets de base puisque le déplacement des objets de base est discrétisé. Les éventuelles restrictions de ces cas particuliers seront mentionnées.

[53] Elles sont fondamentales *pour l'implémentation dynamique* des concepts mis en jeu : il s'agit essentiellement de constructions sur les faisceaux de droites qui sont indépendantes de la nature du faisceau : l'exploration sur les faisceaux prend alors une dimension nouvelle pour l'étude, en particulier, des propriétés des trilatères.

Ces trois chapitres (2, 3 et 4) forment un tout cohérent autour des aspects théoriques relatifs aux G.N.E. placés dans un contexte d'illustration et de réalisation dynamiques - sur des modèles euclidiens - des objets définis et étudiés.

Nous avons choisi de faire précéder cette première partie, d'un chapitre différent dans ses objectifs, et dans son ton rédactionnel. Le premier chapitre, écrit en dehors de réelles considérations de formation – sauf à illustrer un cours de géométrie différentielle - est un commentaire Cabri-dynamique du premier travail de « réalisation » d'une géométrie non euclidienne, celui de Beltrami montrant que la géométrie intrinsèque des surfaces à courbure constante négative – en particulier celle des surfaces pseudosphériques de révolution – est une géométrie « de Lobatchevsky ».

Pour nous la rédaction de ce premier chapitre, outre son intérêt historique et épistémologique propre, est aussi un hommage à deux personnes qui, pour l'un a incité la réalisation de ce travail, pour l'autre a pensé qu'il pourrait prendre des chemins plus variés que celui initialement prévu. C'est d'abord un remerciement à Jean-Marie Laborde, concepteur de Cabri, seul logiciel de géométrie dynamique permettant de réaliser ainsi des barres de menu sur la pseudosphère puis sur des modélisations très réalistes des autres surfaces pseudosphériques : avec ces outils, on peut manipuler des droites ou des cercles sur ces surfaces et construire des objets plus complexes (comme le pentagone orthogonal).

Cette rédaction est aussi un remerciement à notre collègue Dominique Tournès, chercheur en histoire des Mathématiques au CNRS, qui, étudiant les réalisations avec Cabri, de certains cas particuliers[54] des techniques de Vincent Riccati pour intégrer toute – *toute* – équation différentielle ordinaire à la règle au compas *et la tractoire*, nous incita à transférer ses connaissances en savoir-faire Cabri pour réaliser des figures pseudosphériques. Au fil des semaines, ce qui n'était tout d'abord qu'un défi technique[55], s'est transformé peu à peu en la réalisation d'une première barre complète de géométrie sur la pseudosphère, puis d'une seconde plus générale permettant de mieux voir déployées, dans le cercle limite[56], plusieurs feuilles enroulées sur la surface, et enfin, avec le temps, des barres sur les autres surfaces pseudosphériques (dites hyperboliques et elliptiques). Il est clair que sans l'initiative de notre collègue, et son propre investissement au départ, ce chapitre n'aurait pas existé.

Son contenu effectif est assez éloigné de nos objectifs de formation, nous avons retenu, pour la rédaction de ce chapitre sur le mémoire de Beltrami, de fournir seulement toutes les informations mathématiques et quelques considérations techniques nécessaires pour refaire toutes les figures et les macros[57], mais sans entrer dans le détail pratique des réalisations proprement dites[58] comme aux chapitres suivants : il s'agit véritablement d'un hommage non euclidien aux capacités d'un logiciel conçu à l'origine pour apprendre la géométrie euclidienne…

La seconde partie de cette rédaction porte sur l'expérimentation proprement dite. Elle fait l'objet des chapitres 5, 6 et 7, eux-mêmes précédés d'une introduction spécifique

[54] Quand les tractoires sont des coniques, puisque ce sont des objets de Cabri.

[55] Au départ il s'agissait seulement d'apprendre à *dessiner* un triangle pseudosphérique, simplement pour réaliser des illustrations conformes à la réalité physique des objets, sans intention initiale de rendre les constructions dynamiquement correctes, ce qui nous paraissait alors inaccessible.

[56] Les termes techniques seront clairs à la lecture du chapitre 1.

[57] Précisons toutefois que tout ce travail (le texte mais surtout les figures, les macros et les barres de menu) sera disponible au téléchargement pour une utilisation immédiate.

[58] Parfois assez longues et techniques à mettre en œuvre. Comme bien d'autres parties de ce travail, cela pourra faire l'objet de publications ultérieures ou tout simplement de publications sur le Web.

précisant nos hypothèses, objectifs et décrivant la méthode de travail retenue. Les quatre premiers chapitres étant largement illustrés de *(dessins de)* figures Cabri, pour éviter les répétitions, les suivants renverront à ces illustrations. Par ailleurs, ils seront déjà illustrés eux-mêmes des productions des stagiaires relatives à (quelques-unes de) ces situations déjà explorées dans la première partie.

### Le rapport au logiciel de géométrie dynamique

Tout comme nous avons exploré, dans les premiers chapitres, des aspects mathématiques des géométries hyperbolique et elliptique plus généraux ou diversifiés que ceux directement utiles à la formation, de même, nous avons aussi exploré, dans ces mêmes chapitres, des aspects spécifiques de l'implémentation de la[59] géométrie dynamique dans Cabri qui dépasse le cadre de la formation proposée. C'est en particulier le cas dans le chapitre 2 sur l'utilisation de la surcharge pour placer différentes géométries dans une même barre de menu, dans le chapitre 3, sur une différence d'implémentation avec CabriJava, ou encore avec la réalisation de barres de menus « parallèles » sur deux modèles de géométrie affine et euclidienne dans le chapitre 4.

De ces explorations, et d'une manière générale, de la réalisation soit de barres complètes pour ces géométries soit de figures objectivement complexes, nous tirerons aussi des enseignements à partir desquels, dans la conclusion, nous proposerons aussi quelques réflexions sur les évolutions possibles de l'implémentation « *d'une* » géométrie dynamique, à notre place, c'est-à-dire du point de vue de l'utilisateur « expert » et du formateur.

> *« Contrairement à ce que beaucoup pensent, j'affirme ici que toute activité scientifique (y compris en mathématiques) se constitue (en son langage) et se décrit (dans son métalangage) par l'usage de métaphores. La pensée prend son essor en s'appuyant sur des métaphores ; plus généralement, le "rhétorique" apparaît constitutif de l'activité scientifique comme de toute économie noétique. Il n'est donc a priori nullement illégitime de penser théories et modèles en termes d'images et de représentations. Mais le grand problème, ici, tient dans le choix de "bonnes" métaphores, des métaphores véritablement fécondes, et dans leur contrôle »*[60].

Alors, sachant l'investigation oh ! combien locale, n'ayant pas le regard lucide, *projectif*, d'un Klein, ayant pourtant, nous aussi, fréquenté pendant plus d'un an, une sorte de Riemann[61] avec une vision si profonde de la géométrie, mais sans toujours complètement saisir son point de vue, c'est en toute modestie, avec une vision sûre, mais pas toujours très claire[62], que nous proposons ce travail sur une approche dynamique des G.N.E. et les potentialités de formation qui peuvent en découler.

---

[59] Dans le contexte de la réflexion actuelle sur les implémentations EIAH, l'article défini à cet endroit ne se veut pas porteur d'une vision réductrice (ou partisane) sur la question : simplement l'article indéfini, probablement plus proche de 'la' réalité, serait plus dévastateur encore : il ouvrirait des portes vers des domaines sur lesquels l'auteur de ces lignes est seulement conscient de leur existence (quelle géométrie dynamique dans quelle implémentation ? et réciproquement quelle implémentation pour quelle géométrie dynamique ?), mais n'a pas de recul particulier pour les aborder avec pertinence.

[60] *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique*. Yves Chevallard - RDM 12.1 - 1992.

[61] Il se reconnaîtra.

[62] [NdE] : Par la citation précédente, l'auteur semble s'autoriser à faire ici un parallèle entre ce qu'il appelle la circulation entre les pôles et l'enroulement des feuilles sur la pseudosphère du modèle de Beltrami [le « pourtant, nous aussi »]. La vision n'est pas claire, car il ne connaissait pas encore les variétés didactiques ;-)