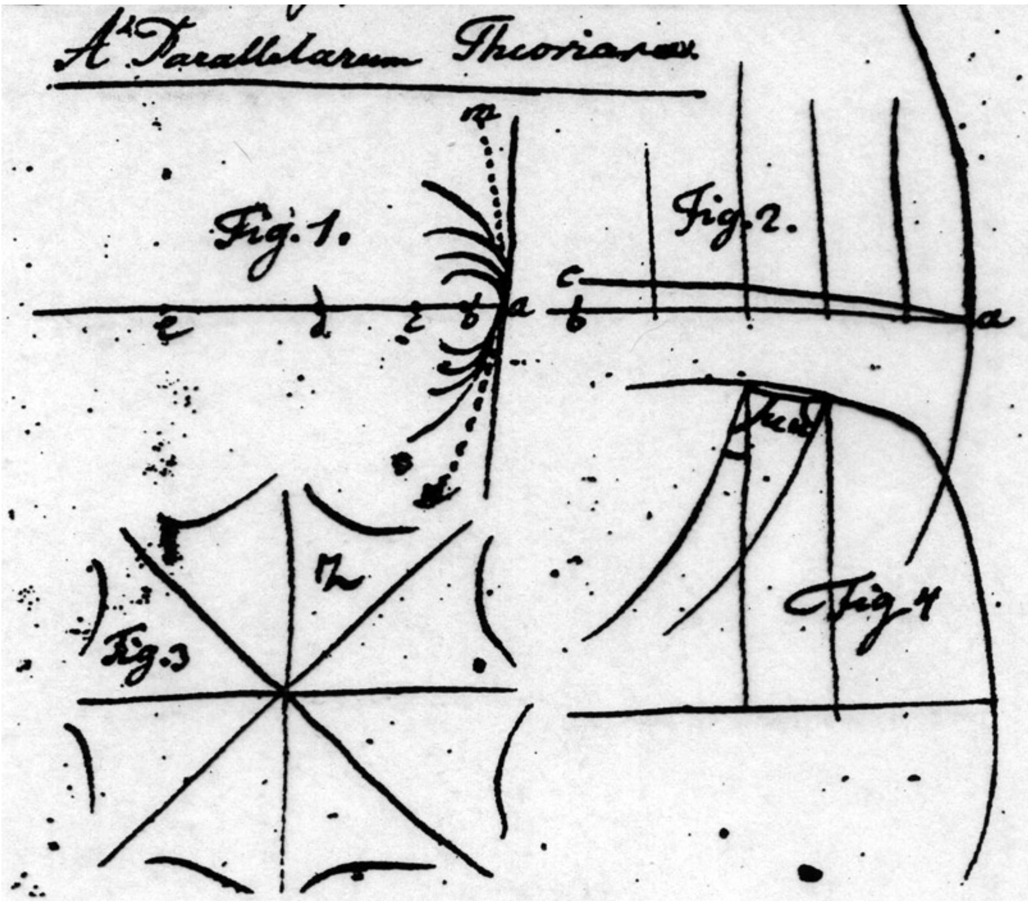
Annexes du Chapitre 2



Manuscrit de Bolyai

A.II.1. Exemple d'algorithme non dynamique

A.II.2. Test de parallélisme en géométrie logique

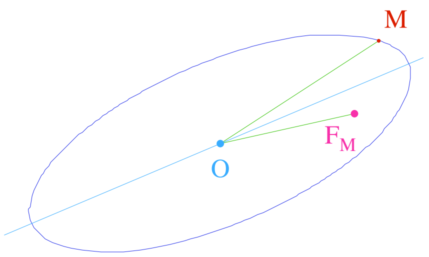
A.II.3. Magie des moteurs de recherche sur l'Internet

A.II.1. Exemple d'algorithme non dynamique

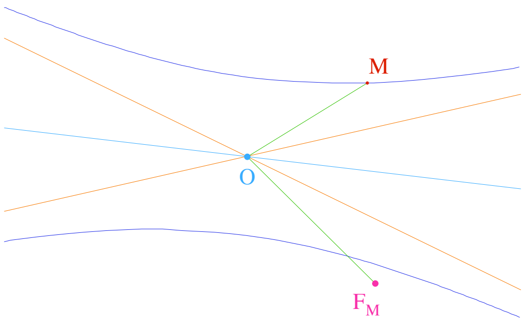
Cabri est un traceur de coniques données par 5 points, ce qui, géométriquement, est le choix le plus judicieux. Cette conique donnée à l'écran, on peut facilement, par des arguments affines, construire son centre, la tangente en l'un quelconque de ses points, et, par des arguments euclidiens, ses deux axes.

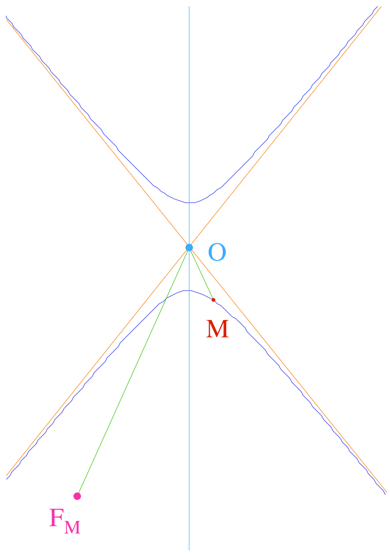
1.a. La question de l'axe focal

Mais lequel des deux axes est l'axe focal ? La réponse à cette question – *si elle est dynamique* – n'est pas si simple, même si on dispose d'une réponse statique bien établie.



Il semble qu'il n'existe pas de détermination de l'axe focal d'une conique en général qui soit correct pour toutes les ellipses et toutes les hyperboles. En effet, en notant O le centre de la conique, M un point et F le point de Frégier de M, la construction classique par la bissectrice intérieure de MOF n'est pas générale :



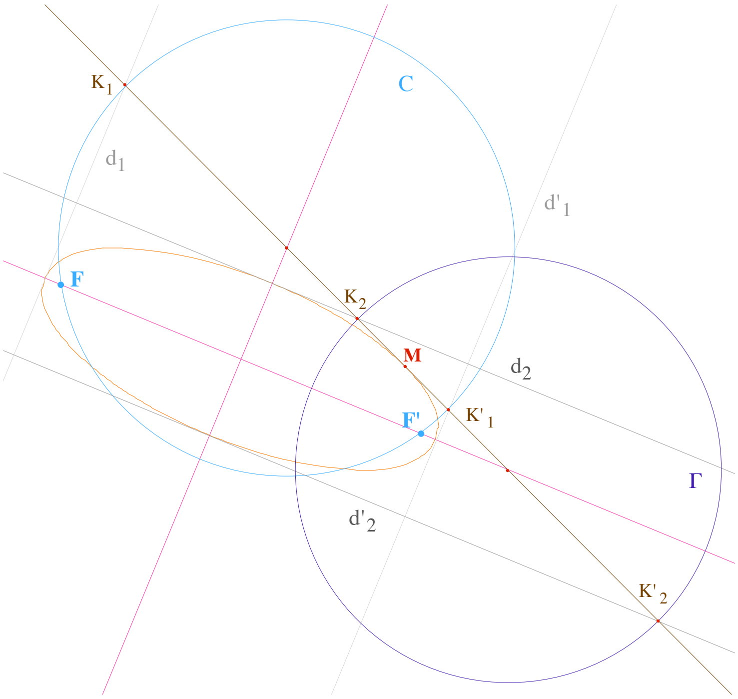


Elle donne l'axe focal d'une ellipse et de toute hyperbole d'excentricité inférieure à $\sqrt{2}$, mais pour les autres hyperboles, il faut prendre la bissectrice extérieure.

1.b. La détermination des foyers

Une fois les axes construits, on cherche à déterminer ses foyers. Il y a plusieurs constructions[1] possibles (par exemple dans le Deltheil & Caire). Mais toutes utilisent à un moment donné *l'intersection avec l'axe focal* (ou l'axe non focal).

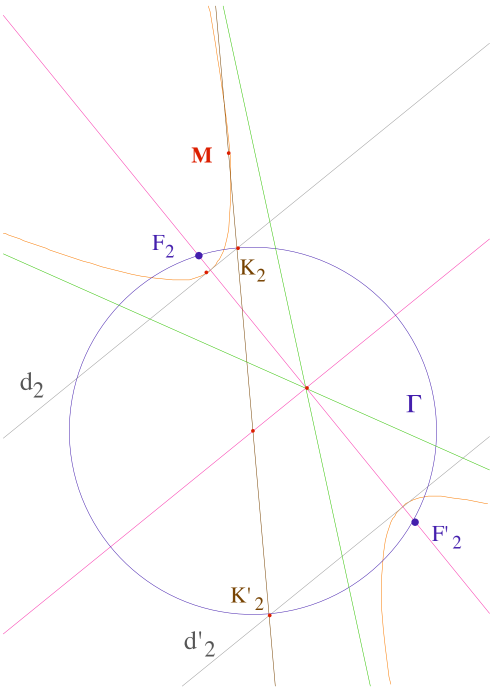
[1] Rapidement illustré ici, mais largement détaillé dans les liens 4, 5, 6 de cette page d'accueil : http://www.reunion.iufm.fr/Dep/Mathematiques/abracadabri/Coniques/Guillerault/ConfGuillerault.html



L'axe focal connu, on mène les deux tangentes d_1 et d'_1 aux sommets. Elles coupent une troisième tangente (prise en un point M quelconque) en K_1 et K'_1.

Le cercle de diamètre $[K_1K'_1]$ coupe l'axe focal en les deux foyers.

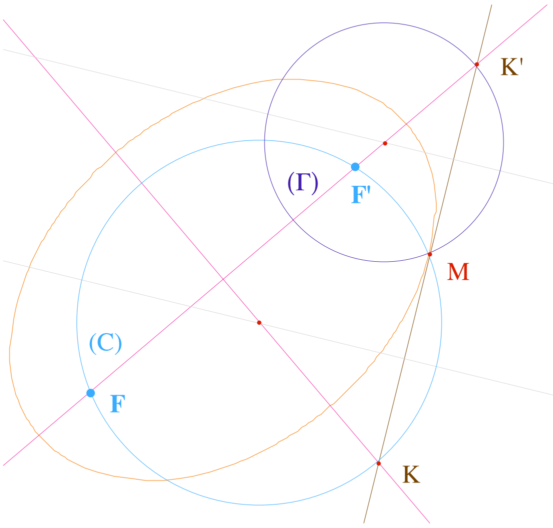
Ici, on a tracé l'intersection avec les deux autres droites d_2 et d'_2 car les axes de la conique sont échangés quand l'excentricité dépasse $\sqrt{2}$, c'est l'intersection avec le cercle Γ qui donne alors les foyers : la construction n'est pas un algorithme dynamique.



Ci-contre, sur la même figure, les axes sont inversés, l'intersection de la droite « axe focal » de l'illustration précédente n'a aucune intersection avec la conique, donc le cercle C (bleu clair) n'existe plus. C'est la seconde droite qui est l'axe focal : les foyers proviennent du cercle Γ.

Ainsi un algorithme qui construit les foyers d'une conique en indiquant de prendre l'intersection d'un cercle « avec l'axe focal » ou « avec l'axe non focal » sans autre précision est un algorithme qui laisse à la charge de l'utilisateur la désignation de l'axe focal. Dans un environnement papier crayon, cette désignation n'est *jamais* précisée, elle est un implicite de l'environnement papier crayon. C'est aussi l'axe qui contient les sommets. Mais dans un environnement dynamique, cette désignation doit, elle aussi, être construite géométriquement.

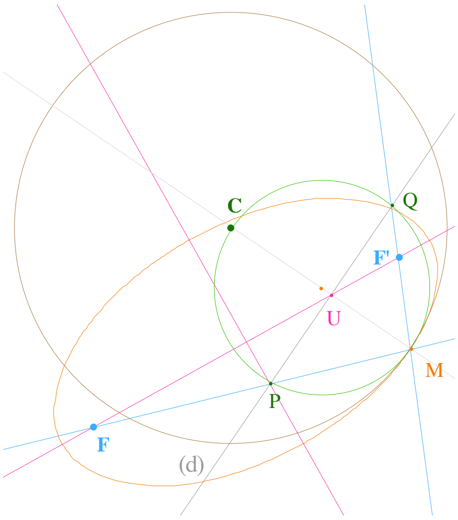
Voyons une deuxième méthode, variante de celle-ci et une troisième, indépendante, mais utilisant toujours l'axe focal.



Cette fois on note K l'intersection de la tangente en M avec l'axe non focal. La médiatrice de [KM] coupe cet axe en un point. Le cercle centré en ce point et passant par M coupe l'axe focal aux foyers.

Autre présentation possible : en prenant M' le symétrique de M par rapport à l'axe non focal, les tangentes à la conique en M et M' se coupent en K. Le cercle construit est alors présenté comme le cercle circonscrit à M, M', K.

Sur l'illustration ci contre, on a aussi réalisé la même construction pour l'autre axe. Comme dans le cas précédent, ce second cercle, pour l'ellipse, ne coupe jamais l'axe à partir duquel il est construit.



Dans cette troisième méthode, le cercle marron est le cercle de courbure – de centre C – associé au point M (construit avec le point de Frégier indépendamment des foyers).

La droite (MC) coupe l'axe focal en U. Soit (d) la perpendiculaire à (MC) en U, et P et Q les intersections de cette droite avec le cercle de diamètre [MC].

Alors les droites (MP) et (MQ) coupent l'axe focal aux foyers de la conique.

Là encore, cette méthode, utilisant l'axe focal, n'est pas un invariant dynamique, la macro réalisée avec elle n'est pas un algorithme dynamique.

Nous ne l'avons pas cherché, mais on peut penser qu'une construction algorithmique est probablement assez accessible : il s'agit, par exemple, de faire basculer une droite sur les bissectrices d'un angle selon qu'un nombre soit ou non plus grand que $\sqrt{2}$. Ce que nous voulions souligner ici c'est un certain attachement culturel à l'environnement de travail quand on rédige un l'algorithme, pour le papier, ou pour un logiciel de géométrie dynamique.

Les recherches en didactique nous ont enseignés de bien curieuses représentations des élèves comme celle, assez imprévisible et pourtant répandue à une époque en classe primaire, liée à l'utilisation de l'encre pour montrer l'image d'une symétrie orthogonale par pliage. On s'est aperçu que beaucoup d'élèves concevaient la symétrie orthogonale non pas comme échangeant les points d'un côté de l'autre de l'axe, mais comme n'échangeant que les points existant, comme si la symétrie axiale avait un fonctionnement physique *potentiel*. Cette représentation, liée à la manipulation certes, est aussi dépendante des matériaux utilisés, de l'encre, au fait qu'il ne sèche pas trop vite.

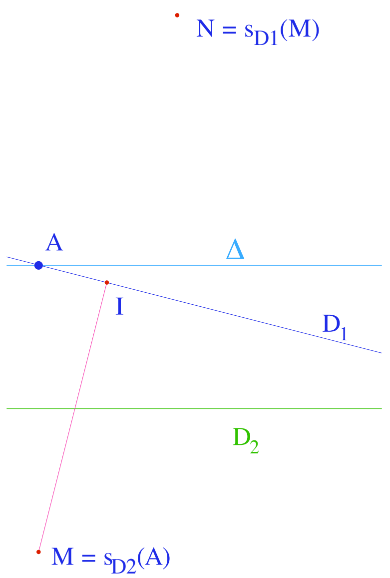
Nos algorithmes sont parfois à l'image de cette représentation d'élève, liée au temps de séchage de l'encre, quelque soit l'encre : parce la conique est fixe sur le papier, *je vois* l'axe focal ; parce que le logiciel que j'utilise construit l'inverse d'un point même si le cercle d'inversion est réduit à un point (qualité d'encre extraordinaire), mon algorithme de cercle hyperbolique *est aussi* un algorithme d'horicycle.

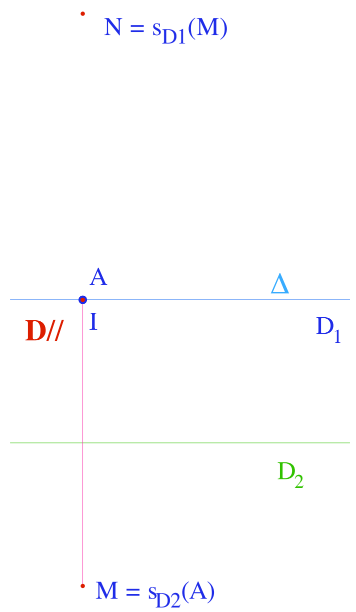
A.II.2. Test de parallélisme en géométrie logique

Nous avons utilisé un teste de parallélisme pour construire les droites dans dmPP. Nous avons choisi de présenter cette figure Cabri en annexe car, outre que c'est un petit bijou algorithmique, elle montre elle aussi notre dépendance à l'implémentation et en particulier ici, à la précision de Cabri.

Tester que deux droites sont sécantes est immédiat dans Cabri, l'existence de leur intersection est une confirmation du non parallélisme des deux droites. Mais si elles sont parallèles ? Comment tester la non existence de leur intersection ? Par l'existence d'un point !

Soient deux droites D_1 et D_2, et A un point de D_1. On veut construire « sous[2] A » un point D// qui n'existe que si les droites sont parallèles.





À partir du point A, on construit M, puis N et le milieu I des deux points. Nous avons construit 3 objets. Ajoutons un quatrième objet, la droite Δ parallèle à D_2 passant par A, puis un cinquième, le segment [AI].

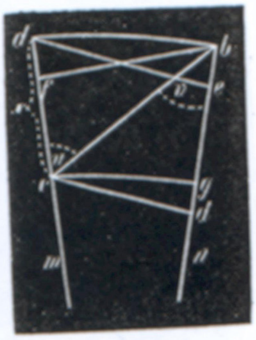
Alors les deux droites sont parallèles si et seulement si l'intersection de la droite Δ et du segment [AI] existe. Si c'est le cas, notons le D//, il est sous I qui est sous A.

Nous avons donc construit un test de parallélisme en 5 objets intermédiaires.

[2] Physiquement le point est dessous, dans l'interface de Cabri, et algorithmiquement il est dans une branche de l'arbre dont le point A est la racine.

A.II.3. Magie des moteurs de recherche sur l'Internet

Car cd et ae étant $\perp bn$, et $bf \perp am$, on aura (comme au § 27)



$$\bigcirc bf : \bigcirc cd = \sin u : \sin v.$$

Or, on a évidemment $bf = ae$. Donc

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = \sin u : \sin v.$$

Mais dans les surfaces F de am et de cm, qui coupent $ambn$ suivant ab et cg, on a (§ 21)

$$\bigcirc ea : \bigcirc dc = ab : cg = X.$$

Donc aussi

$$X = \sin u : \sin v.$$

Mémoire de Bolyai dans sa traduction de Hoüel.
Il s'agit du paragraphe 28 (illustré à la figure II.38.b)

Voici quelques extraits d'un article de psychanalyse lacannienne croisé lors de recherches sur Bolyai. Au moins la navigation sur le Web nous met-il en contact avec des réalités différentes des nôtres, sur le même sujet. Nous n'en avons reproduit que quelques extraits consacrés à Bolyai en supprimant les références des nombreuses citations. L'article complet est consultable à l'adresse suivante

http://lacanian.memory.online.fr/MMosconi_Psychoses_et_infinis.htm

Psychoses et infinis :
Janos Bolyai et Georg Cantor

Paru dans"Science et fictions",
PERU,PRESSES UNIVERSITAIRES DE RENNES - 2000

Janos Bolyai, qui élabora et publia le premier une géométrie non-euclidienne et Georg Cantor qui théorisa les nombres transfinis, nous donnent l'exemple du drame subjectif du savant lorsque son destin ,du fait de la forclusion du Nom du Père, ne s'inscrit pas dans le mythe oedipien. C'est-à-dire l'exemple de la conjonction de diverses forclusions. Face au réel insensé que découvre la science, nous nous trouvons en présence d'une forclusion radicale qui n'est pas sans rapport avec l'ausstossung, le rejet fondamental constitutif du réel au niveau de l'appareil psychique que Freud formalise dans son article sur « La dénégation ». La science,de par son régime, tente aussi de suturer, de forclore son propre sujet. Une fois son registre établi, elle ne veut rien savoir de la vérité subjective comme cause. Elle fonctionne sans la mémoire de ces crises, de ces drames qui ont participé à sa production. Mais la question du fondement de la science est incontournable dans ses moments de crise. Descartes le découvre avec son recours au malin génie, qu'il barre bien vite en faisant appel au Nom-du-Père. Dieu est parfait donc non-trompeur, il m'assure que les vérités mathématiques sont intangibles.

Dans cette perspective, il est frappant que deux psychotiques se trouvent en bonne place à l'origine de la crise des fondements qui ébranle les mathématiques au XIX° siècle. Janos Bolyai soulève la sorte de sublimation naturelle qu'est le Nom-du-Père qui pèse sur la loi de l'évidence durant des siècles. Il pousse à ses ultimes conséquences mathématiques le fait que l'axiome des parallèles soit indécidable dans la géométrie Euclidienne. Ce qui subvertit le champ physico-géométrique et annonce la relativité générale. Georg Cantor passe outre à l'interdit aristotélicien qui pèse sur l'infini actuel, sur l'infini vu de l'infini. En élaborant la théorie des ensembles infinis, il construit une arithmétique des transfinis qui révèle l'inconsistance de certains ensembles. Les paradoxes qu'il soulève à l'orée du XX° siècle amènent les mathématiciens à réélaborer les fondements mêmes des mathématiques.

[Suit un résumé sur l'histoire de la démonstration du V° postulat, avec ses différents enjeux]

[Puis une présentation de l'angle de parallélisme]

L'angle de parallélisme $\alpha=\prod(p)$ varie en fonction de la distance effective p puisque les longueurs sont absolues.La formule de base est la suivante : $e^{-p/k} = \tan\left(\frac{\Pi(p)}{2}\right)$

De cette formule on peut dériver les propriétés métriques du plan hyperbolique. Il s'en déduit aussi qu'il existe une infinité continue de géométries hyperboliques en faisant varier le paramètre k et que cette infinité tend vers le cas euclidien lorsque k tend vers l'infini. La géométrie euclidienne est donc la limite à l'infini de la géométrie hyperbolique et sa tangente lorsque les longueurs tendent vers zéro. *[… paragraphe sur Gauss …]*

Janos Bolyai démontre bien là que la psychose est un essai de rigueur: la géométrie absolue qu'il élabore dans les quarante-trois paragraphes de l'Appendix ne comporte quasiment que des théorèmes « absolus » valables dans la géométrie hyperbolique et dans la géométrie euclidienne.

Qu'est-ce qu'un axiome en effet ? C'est un dire qui ne se couple au dit que d'y « ek-sister » et qui de ce fait excède la « dit-mention » de la vérité tout en la rendant possible, selon la définition qu'en donne Lacan dans "L'Étourdit". C'est un dire qui ne se pose en vérité que pour permettre à une vérité partielle de se déployer. La géométrie paramètrée de Bolyai donne en quelque sorte une infinité continue d'axiomes équivalents à l'axiome des parallèles, une infinité de dires. Elle donne aussi la clef d'une interprétation possible du réel par la détermination du paramètre k. Il y a là comme une holophrase de l'imaginaire de la géométrie, du symbolique des mathématiques et du réel de la science selon la structure du noeud trèfle propre à la paranoïa.

Comment s'inscrit sa trouvaille dans la vie de Janos Bolyai ?

Son père, Farkas Bolyai, est lui aussi mathématicien. Condisciple de Gauss à Göttingen, il échange avec lui une correspondance suivie où il traite aussi bien de problèmes mathématiques que de ses soucis familiaux. Il s'attaque aussi aux problèmes des parallèles et tente de démontrer la validité absolue de l'axiome XI, il tente d'en faire un théorème à l'inverse de Janos.

Pour Farkas, la passion des parallèles est un genre de folie qui n'est pas sans rapport avec la catastrophe que fut son premier mariage avec la mère de Janos, Suzanna Benkö. Par exemple il écrit à Gauss à ce propos : "C'est ici que se dresse le récif le plus dangereux dans la mer en furie, la pierre tombale de tant de mérites". Il écrit à propos des parallèles : "labyrinthe qui ne cesse de m'attirer, c'est dans ces paysages que se trouvent les colonnes d'Hercule. J'ai navigué parmi tous les récifs des côtes de la mer morte infernale, et j'en suis toujours revenu le mât arraché et les voiles déchirées". Lui, qui se voulut un sans nom, (il publia six drames de manière anonyme), se trouva un "nom de jouissance" pour sa tombe qui conjoint son horreur des femmes et son amour de la science. Il voulut en effet que sa tombe ne portât aucune marque mais souhaita être enterré sous un pommier en référence aux trois célèbres pommes, celles d'Ève et du jugement de Pâris qui "avaient changé la terre en enfer" et celle de Newton "qui l'avait replacé au rang des corps célestes".

Dès qu'il sait que Janos s'intéresse aux parallèles, il le met en garde : "Ce noir sans fond a peut-être englouti mille géants newtoniens". Il le met en garde aussi contre les femmes et lui enjoint d'aller visiter un service de vénérologie avant toute aventure sexuelle.

La mère de Janos, elle, est psychotique. Son délire se déclenche à nouveau lorsque son fils la quitte en 1818 pour poursuivre ses études à Vienne à l'Académie du Génie militaire. En voici les termes, notés par Farkas : "Moi Dieu devenu Dieu; je dis ce que je suis : un point où commence le grand Tout, où, de même il finit. Je dis ce que je suis: un centre dont s'originent et autour duquel gravitent des cercles qui se répandent sans fin et qui en se rétractant deviennent à nouveau un point. Qui je suis : d'innombrables éclats - morceaux qui deviennent Dieu de nouveau et Dieu se décompose de nouveau en éclats - morceaux et ainsi jusqu'à la fin, c'est à dire sans qu'aucune fin n'arrive jamais ..."

La concordance de la logique à l'oeuvre dans ce délire et dans la théorie de Janos est frappante. En 1823, il écrit à son père : "J'ai créé un univers nouveau à partir de rien." Sa géométrie aboutit au fait que "sur un signe" - le paramètre k - l'espace monde tout entier se métamorphose. En décidant à notre gré du paramètre k, nous obtenons un espace hypothétique soit euclidien, soit non euclidien à courbure négative. En choisissant k toujours différent ("i" dans l'Appendix) on réussit à transformer à volonté le système géométrique hypothétique et cela reste possible jusqu'à ce qu'on se heurte à une contradiction par rapport au système réel. Or cette contradiction n'advient jamais. (Appendix 32)

La théorie de Janos, par le biais de petites lettres ou de signes qu'il a inventés pour la circonstance, apparaît comme une mise en forme de l'énigme de la folie de sa mère, une mise en forme du réel à l'oeuvre dans ce désir fou non barré par le Nom - du - Père qui fait de Suzanna Benkö un espace – monde qui change sur un signe. Janos entre dans sa théorisation par l'idée de droite disjonctive, il appelle parallèle à une droite *a* la première droite obtenue par rotation à ne pas couper cette droite *a*.

[Il s'agit de la figure II.35 dont nous avons souligné l'importance épistémologique]

Imre Hermann fait l'hypothèse qu'il s'agit d'une tentative de symboliser la séparation de la mère et de l'enfant, d'une tentative d'auto guérison. Nous dirions plutôt en termes lacaniens qu'il s'agit d'une tentative de traiter le réel ravageant du désir de la mère par le biais du symbolique, d'une tentative de suppléance face au déclenchement de sa propre psychose dont Farkas repère des éléments avant-coureurs dans l'enfance.

Gauss, ce "Prince des géomètres", parait avoir un temps la fonction de tenant lieu de Nom - du - Père. Par sa théorisation qui s'adresse à Gauss, sans qu'il lui en fasse part, Janos se met en rivalité avec son père, qui se voit dans cette histoire jouer le rôle du roi Lear, du père qui lâche, qui cède, à qui l'on vole le signifiant de la paternité.

[…]

Janos vit peu de temps après son premier amour passionnel pour une femme. Mais en 1832, Gauss, après avoir reçu l'Appendix par le biais de Farkas, rédige une lettre restée célèbre : "Je ne peux louer ce travail car ce serait comme me louer moi-même. En effet, le chemin pris par ton fils, ses résultats coïncident presque entièrement avec les méditations qui ont occupé mon esprit ces trente dernières années ... »

Janos se sent alors destitué de sa priorité, accusant son père de complicité, il passe à l'acte et abandonne pour un temps les mathématiques pour se consacrer à l'élaboration d'une langue parfaite à partir du Magyar, sa langue maternelle. Cette langue parfaite devait assurer le bonheur de l'humanité selon sa doctrine de salut. Il s'y consacra jusqu'à sa mort.

[…]

En 1848, Farkas lui donne à lire le traité de Lobatchevski sur la théorie des parallèles. Il en rédige un commentaire point par point et conclut qu'il a été trahi, que Lobatchevski n'existe pas et que tout cela n'est qu'une machination vengeresse de Gauss, ce qui ne l'empêche pas d'apprécier le travail de son hypothétique double qu'il qualifie de génie.

[…]

De par sa structure, il lui est difficile d'admettre que l'Autre soit inconsistant et sa géométrie absolue pousse la géométrie générale à un degré de consistance supplémentaire. Il lui est aussi difficile d'admettre que l'Autre soit incomplet, ce qu'inscrit dans les mathématiques la notion même d'axiome qui relève, dans la logique, du signifiant du manque de l'Autre. Son travail sur la langue parfaite est une tentative de mise en forme d'un métalangage qui supplanterait les langues vivantes et érigerait un Autre de l'Autre, à l'opposé de ce qu'inscrit justement le signifiant du manque de l'Autre.

Sa structure lui permet de passer outre à la méconnaissance névrotique engluée dans le sens, dans la copulation du symbolique et de l'imaginaire. Elle le soumet à la passion de l'ignorance, à la jonction du symbolique et du réel, comme les mathématiques, passion de l'ignorance qui ici est un autre nom de la connaissance paranoïaque. Le désir du mathématicien qui l'anime lui permet de s 'apercevoir de ce qu'il y a de réel dans le symbolique.

[…]