

# Les figures

## qui n'ont pas été faites

*Je suis prêt à vous scandaliser en affirmant, par exemple, que la géométrie du triangle, les propriétés d'un certain objet dit « triangle » sont passées de mode et sont devenues stériles mais que l'objet existe. Je m'oppose violemment à l'assertion de Dieudonné que les triangles n'existent pas. Je ne pense pas que ce soit vrai. Il y a quelque part, ni dans le temps, ni dans l'espace, un nœud de propriétés logico-déductives sur cet objet et qu'on peut retrouver probablement à partir des cordes cubiques au prix d'acrobaties incroyables et sans grand intérêt ; cet objet existe, même si à l'heure actuelle il ne sert à rien. Je n'encouragerais personne à faire de la géométrie du triangle.*

*Marcel Paul Schützenberger  
Triangle de pensées  
(À propos de la nature des objets mathématiques)*

*J'ai hésité, puis j'ai écrit : « Le temps précède l'existence ».*

*Ilya Prigogine  
La fin des certitudes*

## Présentation

Pour terminer, en épilogue, voici quelques pistes de réflexion pour poursuivre ce travail, présentées sous forme de figures inachevées car demandant un temps d'investigation que le planning de réalisation puis de rédaction de ce travail ne permettait pas.

Nous ne savons pas répondre à la question de Prigogine : « le temps précède-t-il l'existence ? » quand il interroge l'objet temps, comme concept. Par contre, pour l'outil temps – dans l'intervalle de – nous confirmons, comme tout un chacun, que le temps est à l'origine de l'existence, et en particulier la non existence de certaines figures tire son origine dans un manque de (l'outil) temps, manque construit par notre propre planning de rédaction.

Pour l'essentiel, il s'agit de prolongements de constructions déjà établies, sauf dans un cas, par lequel nous terminons notre présentation, où il s'agit d'un vrai regret : là, l'existence établie n'a pas su révéler assez de temps pour rédiger sa propre preuve d'existence<sup>1</sup>. Comme souvent en mathématique l'existence a précédé le temps ... de sa preuve, et donc d'un point de vue<sup>2</sup> mathématique, son essence : la pratique de Cabri nous rendrait-elle, en cette fin de parcours, de fait, existentialiste ?

---

<sup>1</sup> On notera le quotientage habile par celui qui fait la démonstration : devant le temps il n'est qu'un représentant de ces exécutants matériels de la preuve, ceux qui portent la craie ou le stylo. Cela évite de parler de celui qui n'a pas su, justement, le porter correctement ;-)

<sup>2</sup> Mais pas celui de tous : les mathématiques expérimentales existent et ont désormais, largement, droit de citer comme telles.

## X.1. Les figures pseudosphériques

Plusieurs pistes, mentionnées dans le texte, mériteraient un travail d'approfondissement, que ce soit pour aller plus loin sur la pseudosphère, comparer les trois modèles, ou aller vers d'autres illustrations

### X.1.a. Une barre multifeuille de menus pseudosphériques

Dans toutes les figures présentées dans le chapitre 1, sauf les figures I.13, les points de base de la pseudosphère sont sur la feuille principale, même si cela entraîne des constructions d'objets multifeuilles, et plus généralement, les formules utilisées, en particulier lors du passage du plan de Beltrami à la surface, contiennent, implicitement, que les points « de base » des macros sont sur cette feuille principale, d'où l'avertissement sur fond jaune dans la figure I.45 par exemple.

Une extension intéressante serait de reprendre la construction de la barre de menus pour des points de la pseudosphère disposés sur des feuilles différentes. La seule option réaliste est de rentrer , pour chaque objet de base, un paramètre supplémentaire qui précise sur quelle feuille il se trouve. Une esquisse de figure est alors celle-ci :

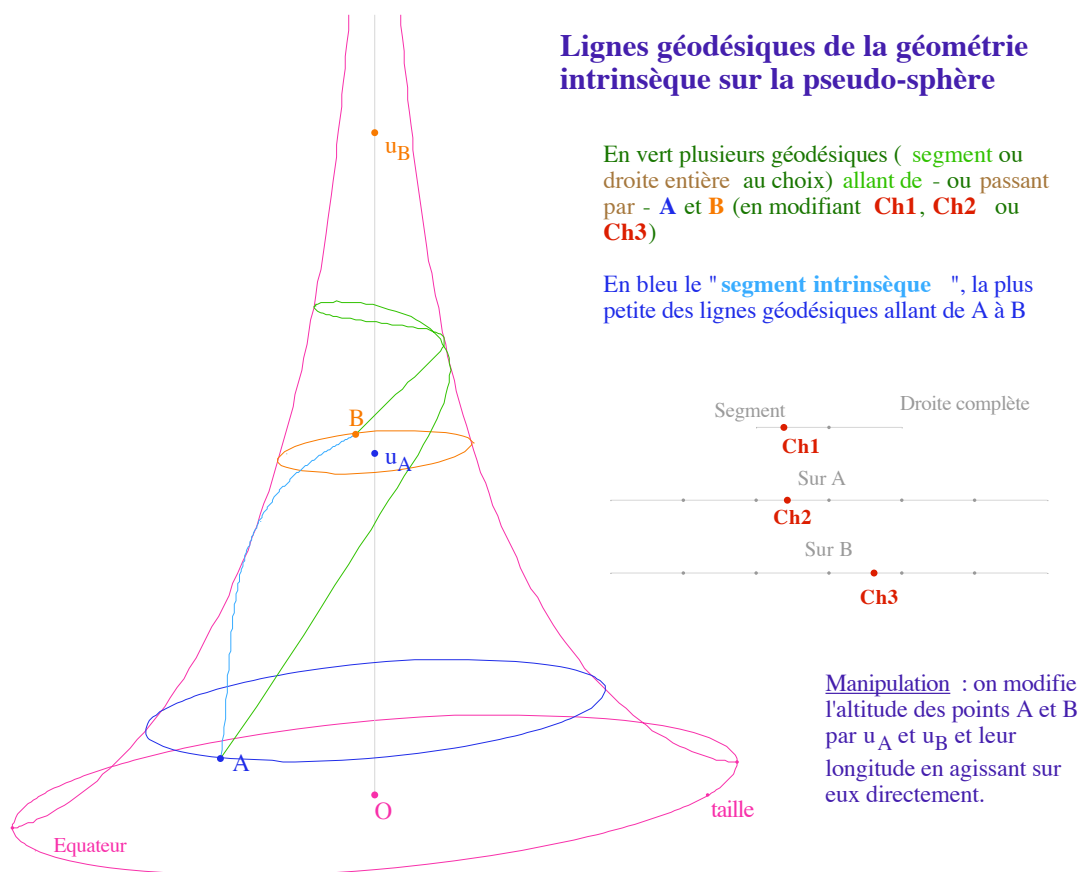


fig. X.01.a – Vers une barre multifeuille

L'idée suggérée ici est de désigner, par un curseur, sur quelle feuille se trouve un point que l'on manipule (dans cette feuille) sur la pseudosphère. L'autre option serait de donner un nombre entier relatif.

La figure précédente est simplement une esquisse car, avant de reprendre toutes les macros individuellement, il est préférable de peaufiner l'interface. Ainsi, comme toute la pseudosphère est entièrement décrite par son équateur, on pourrait s'arranger pour que le paramètre supplémentaire ne soit désigné que par un point de plus dans les macros, le reste de l'environnement des curseurs dépendant directement de la construction de la pseudosphère.

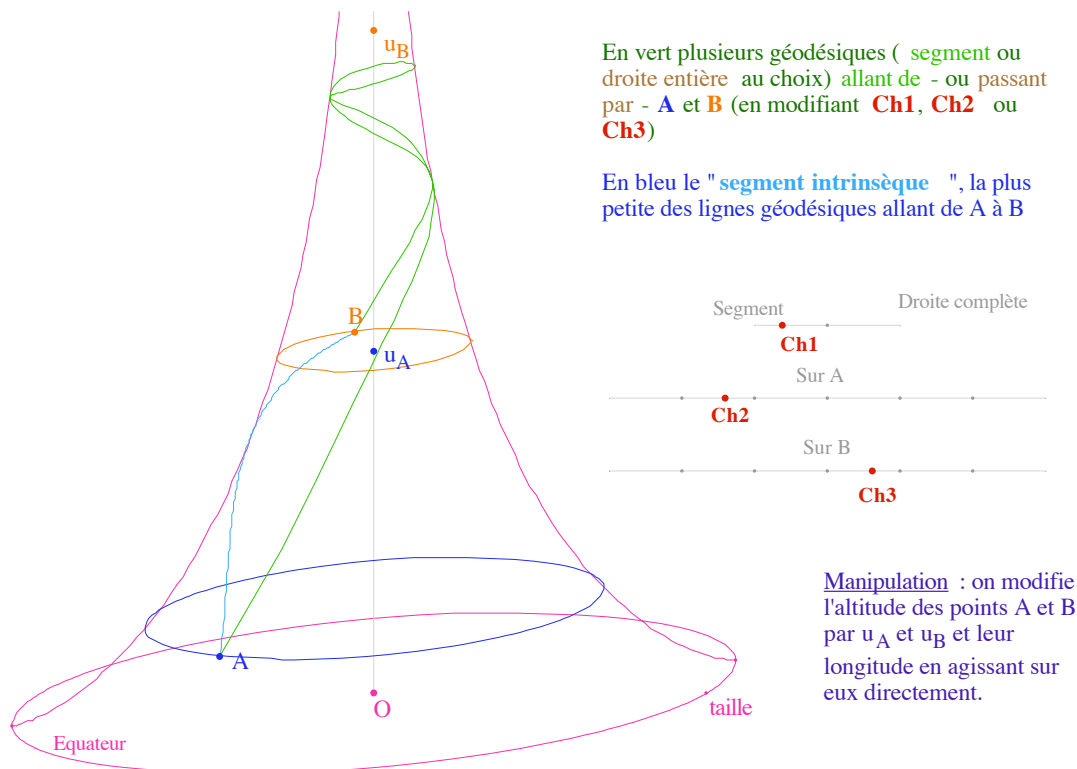


fig. X.01.b – Déplacement de A d'une feuille, le segment fait un tour de plus

La seule contrainte à prendre en compte est le cas où la macro ne construit pas seulement un lieu (droite, segment, cercle) mais renvoie aussi des points à placer sur la surface comme le milieu de deux points, ou l'intersection de deux droites. Dans ce cas, la macro doit ainsi renvoyer un point supplémentaire pour rendre compte de la feuille sur laquelle se trouve l'objet renvoyé. C'est la raison pour laquelle, si pour des questions d'esthétique, il peut être considéré comme préférable de travailler avec différents curseurs, dans les macros, le point pris en considération serait la projection de ces curseurs sur un seul, et le rendu de la feuille à laquelle appartient un point serait aussi sur ce curseur.

Réaliser une telle barre ne contient donc pas de difficulté technique particulière, mais peut quand même demander un peu de temps puisqu'il faut refaire toutes les macros. Pour des constructions plus complexes, il peut être utile aussi de reprendre les correspondances entre la pseudosphère et le modèle de KB, pour que l'on puisse prendre en compte la feuille à laquelle appartiennent les points utilisés. Dans ce cas, on peut ensuite refaire assez facilement, même les figures complexes, sur une plus large étendue de la surface pseudosphérique. Il peut être assez réaliste de se limiter à 7 feuilles : trois avant et trois après la feuille principale.

X.1.b. Une figure intégrant les trois modèles

L'autre figure manquante dans ce chapitre 1 est celle qui permettrait de voir simultanément des figures de géométrie élémentaire sur les trois modèles, avec, par exemple, manipulation directe sur la pseudosphère. Nous en avons déjà parlé. Il s'agit ici d'expliquer les problèmes rencontrés. Il n'y a pas de difficulté majeure, mais il faut du temps pour faire ces figures. Une esquisse de ce qui pourrait être fait peut commencer par ceci :

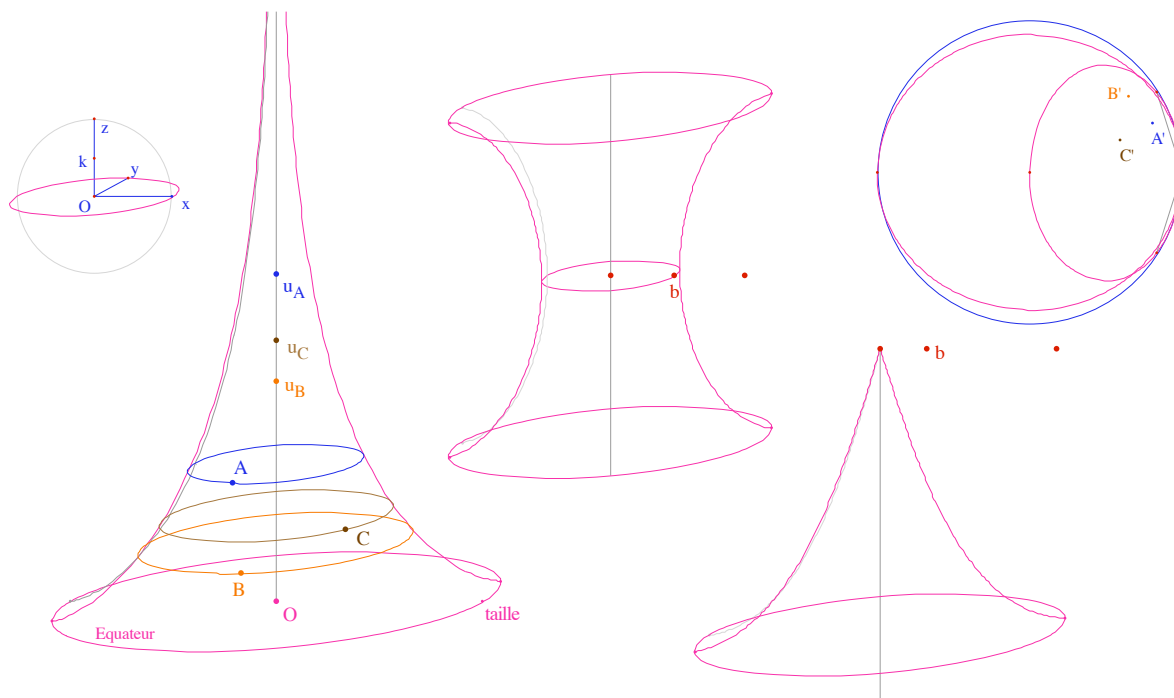
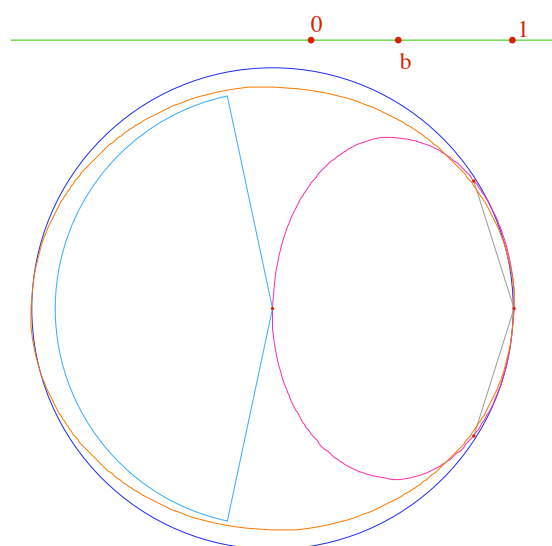


fig. X.02.a – Vers une figure sur trois modèles



Sur le cercle KB, on a construit l'horicycle associé à la pseudosphère et l'équidistante correspondant à la surface pseudosphérique hyperbolique (PSH). Si on a un peu l'habitude du passage de KB vers PSH on voit que, avec les macros usuelles, les points du devant de la pseudosphère (argument entre  $-\pi$  et 0) vont se retrouver dans un quart « arrière » de PSH.

Mais une autre difficulté survient quand on veut placer aussi la surface elliptique PSE : on voit ci-contre que les points de KB, images de ceux de la pseudosphère, ne sont jamais dans la feuille principale de PSE.

fig. X.02.b – Sur la relation des feuilles principales

Il convient donc, dans KB, d'effectuer des transformations pour placer des images isométriques de  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  de telle façon que les points renvoyés sur PSH et PSE soient facilement visibles. Il s'agit d'optimiser ce choix de transformations isométriques qui respectent la manipulation directe, et en particulier les orientations des objets par exemple.

## X.1.c. Une figure Cabri de Riemann

Nous avons déjà parlé, sans entrer dans le détail, de la figure précédente à la fin du chapitre 1, et, dans la conclusion, d'une éventuelle figure qui reprendrait une remarque de Beltrami (commentée à la figure I.01). Voici l'idée d'une autre figure Cabri, proposée par Riemann lui-même (*Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* § V. p. 293):

« Pour éclaircir ce qui précède par un exemple géométrique, considérons les surfaces de mesure de courbure constante. Il est aisé de voir que les surfaces dont la mesure de courbure est constante et positive peuvent toujours s'appliquer sur une sphère dont le rayon est égal à l'unité divisée par la racine carrée de la mesure de courbure ; mais pour embrasser d'un coup d'œil la variété toute entière de ces surfaces, donnons à l'une d'elles la forme d'une sphère et aux autres la forme de surfaces de révolution la touchant selon l'équateur. Les surfaces de plus grande mesure de courbure que cette sphère toucheront alors la sphère intérieurement et prendront une forme semblable à la partie extérieure d'une surface annulaire, la plus éloignée de l'axe de cette surface. Elles seraient applicables sur des zones de sphères de rayon moindre mais recouvriraient ces zones plus d'une fois. Les surfaces de moindre mesure de courbure positive s'obtiendront en découpant, sur des surfaces sphériques de plus grand rayon, un fuseau limité par deux demi-grands cercles, et unissant entre elle les lignes de section. La surface de mesure nulle sera une surface cylindrique ayant pour base l'équateur ; les surfaces de mesure de courbure négative toucheront ce cylindre extérieurement et auront une forme semblable à celle de la partie intérieure d'une surface annulaire tournée vers l'axe. Si l'on considère ces surfaces comme le lieu où peut se mouvoir un segment superficiel, de même que l'espace est le lieu où se meuvent les corps, le segment superficiel sera mobile sans extension sur toutes ces surfaces. »

Comme nous avons réalisé les surfaces PSE et PSH, il existe d'autres surfaces de révolution à courbure constante positive que la sphère, ce sont elles dont il est question ici. L'idée serait de faire quelques macros élémentaires sur ces surfaces et, avec un curseur, faire varier la courbure pour voir un triangle – et ses hauteurs ou ses médiatrices – sur des surfaces de courbure *variable* autour du cylindre.

En effet, dans le chapitre 1, nous avons retenu de considérer toutes les surfaces – la pseudosphère et les deux autres – de courbure constante égale à  $-1$ , le paramètre  $b$  permettant de varier la forme des surfaces. Pour la forme des surfaces elles-mêmes, cela n'était pas une restriction (si on considère que  $b$  est constant, c'est la courbure  $-1/a^2$  qui varie). Faire varier cette fois *la courbure* autour de 1 oblige à reprendre toutes les macros. La question à étudier est l'opportunité de conserver ou non le paramètre  $b$  en plus d'un paramètre  $a$  pour les surfaces de courbure  $1/a^2$  ou  $-1/a^2$ , et de modéliser la génératrice de ces surfaces avec, dans ce cas, trois paramètres, et donc un polynôme à 3 variables nécessairement plus complexe.

Une petite étude préliminaire est à entreprendre pour étudier l'opportunité de ne conserver qu'une seule valeur de  $b$  dans chacun des deux cas. Toutefois, pour couvrir toutes les formes, il serait alors nécessaire que les valeurs de  $a$  passent par la valeur du paramètre  $b$  retenu. En effet, dans le cas de la courbure positive, la surface change significativement de forme<sup>3</sup> selon que  $b < a$  ou  $b > a$ .

La réalisation de la figure de Riemann, avec la manipulation directe de Cabri, et une barre de menu dédiée, est donc réalisable, mais cela demande un peu de temps.

<sup>3</sup> On se reportera à l'ouvrage déjà cité à la note 71 p. 90, toujours au chapitre 19.

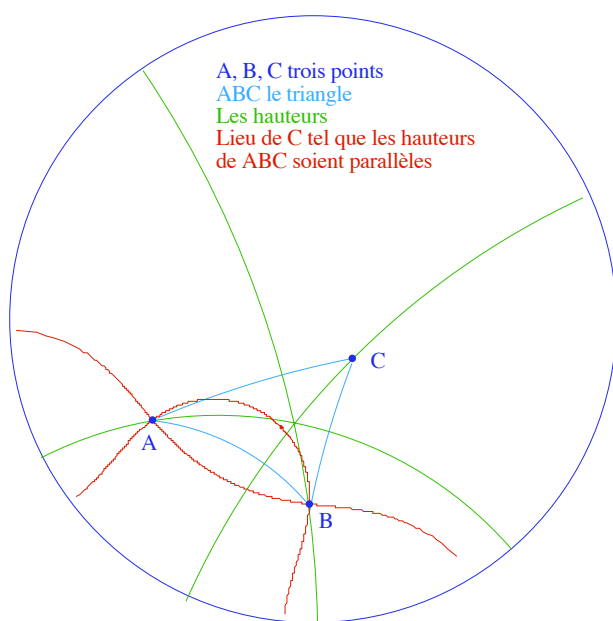
## X.2. Les figures hyperboliques des modèles plans

Plusieurs choses pourraient être finalisées, comme les demi-rotations et le plongement projectif du modèle KB. C'est ce que nous avons commencé, mais d'un autre point de vue, avec le projet de barre de menus dite KH comme proposé en III.7.

La principale figure non terminée est la gestion dynamique de la construction de Perron (II.3.g p. 188). Les figures des tangentes communes (II.2.f p. 148) réalisées directement dans DP ne sont pas satisfaisantes, malgré les efforts pour cela, l'accumulation de résultats géométriques intermédiaires et de techniques Cabri utilisées. Là encore, au delà de la conjugaison avec KB, dont on a vu l'efficacité, il serait intéressant de reprendre cette figure sur la base d'une nouvelle réflexion.

Nous avons laissé entendre la possibilité d'une Cabri-réalisation de la géométrie ... euclidienne ... sur l'horisphère (*fig II.37* p. 167) : on peut chercher à réaliser une barre de menus sur l'horisphère et y implémenter des figures sur les premières propriétés sur les horicycles (comme *fig. II.38*).

Parmi les (petits) regrets personnels, celui de ne pas avoir pris le temps de caractériser géométriquement le problème pour les hauteurs d'un triangle comme il était élémentaire de le faire pour les médiatrices (*fig. II.14* p. 140) :



Étant donnés deux points A et B il est facile de construire le lieu des points C tels que les hauteurs de ABC soient en faisceau sans support. Pour les mêmes raisons qu'avec les médiatrices le lieu des points C pour que les hauteurs sont concourantes est une différence symétrique des ensembles ainsi délimités. Fort des résultats de IV.10.c (p. 461) sur les médiatrices et les hauteurs, nous avons cherché une bijection (non isométrique) qui transformerait la question des médiatrices en celle des hauteurs et donc les horicycles en ces deux courbes ; sans y parvenir, probablement car ne se posant pas les bonnes questions.

*fig. X.03 – Passage des médiatrices aux hauteurs ?*

### X.3. Les figures elliptiques des modèles plans

Il peut manquer les équivalents des constructions sur la pavages. Par principe nous n'avons pas voulu utiliser les résultats trigonométriques, mais nous n'avons pas trouvé d'équivalents géométriques aux constructions directes de triangles rectangles d'angles donnés comme dans le cas hyperbolique.

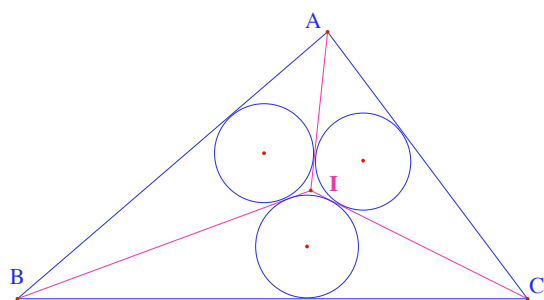
Comme déjà indiqué, l'étude des modèles KH et KE va concentrer notre attention après ce travail, en particulier les ponts géométriques entre les deux.

### X.4. Les faisceaux

Par rapport à nos objectifs, il manque, dans IV.10, plusieurs démonstrations, dans la continuation des rédactions de Bachmann, en particulier autour de la cocyclicité.

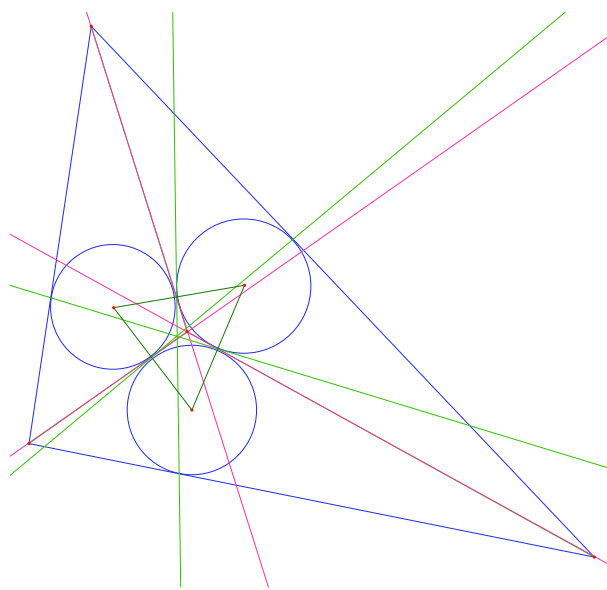
Nous avons prévu de proposer une preuve de ce que l'on pourrait appeler les *faisceaux de Gergonne*, extension des points de Gergonne et Nagel (fig. II.33 p. 161). De même, nous n'avons pas réussi à écrire, dans le style du chapitre 4, la preuve de notre *construction absolue de Malfatti* pour un trilatère en général.

Détaillons les étapes de cette construction, dans le cas euclidien : il s'agit simplement d'une lecture absolue de la construction usuelle<sup>4</sup> :



Étape 1

Soit I le centre du cercle inscrit de ABC (ou du trilatère, on continuera sur le triangle, mais la construction s'adapte comme on l'a vu en II.34 p. 161). On construit les cercles inscrits – en pratique seuls les centres suffisent – des triangles ABI, BCI, et CAI.

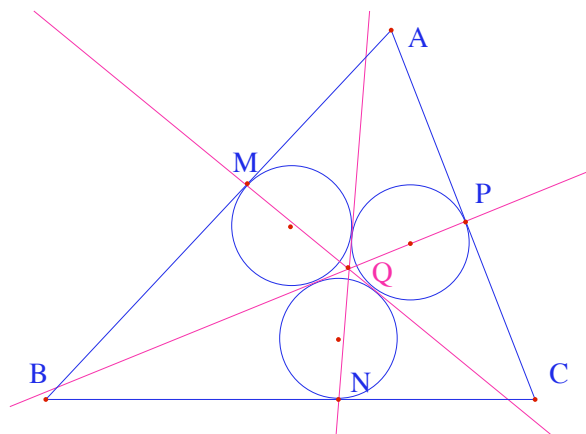


Étape 2

On construit les autres tangentes communes aux trois cercles inscrits des triangles. En pratique ce sont seulement les symétriques des bissectrices du triangle initial par rapport à la droite des centres (pris 2 à 2) des cercles inscrits des trois triangles intérieurs. C'est la raison pour laquelle il n'est pas nécessaire, dans les constructions complexes comme sur PS (fig. I.41 p. 86) ou encore PSH (fig. I.51 p. 94) de construire les cercles, seuls leurs centres sont utiles.

Ces trois nouvelles droites sont à faisceau (à centre mais cela ne sert pas).

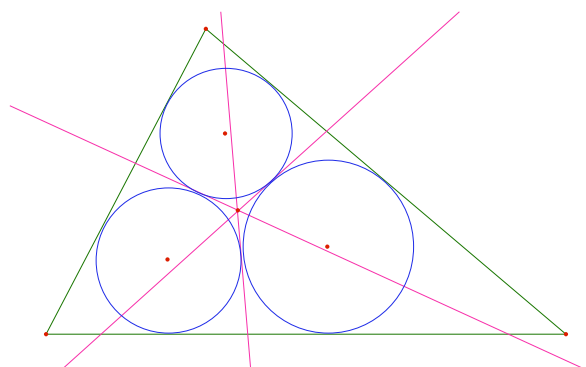
<sup>4</sup> Par exemple Carrega – La règle et le compas (Hermann), ou Peterson – La géométrie du triangle (Gabay)



## Étape 3

Soit  $Q$  le centre de ce faisceau. Chaque droite tangente à deux cercles coupe le côté du triangle (trilatère) tangent à aucun des deux cercles en un point ( $M, N, P$  sur la figure ci-contre).

Au passage on notera que sur ce point, la description – et la preuve – du Carrega ne sont pas claires, ce qui nous a probablement aidé à voir l'aspect absolu.



## Étape 4

Alors – et c'est ce que nous ne savons pas montrer de manière absolue, en terme de faisceau – les quadrilatères  $AMQP$ ,  $BNQM$ ,  $CPQN$  sont circonscriptibles (admettent un cercle inscrit).

Ces cercles sont les cercles solutions de la construction de Malfatti.

L'aspect absolu, pour le premier quadrilatère par exemple, est immédiat : la preuve euclidienne porte sur deux faisceaux, ici de centre  $A$  et  $Q$ , mais d'une manière générale, ils peuvent être quelconques, d'où la construction pour les trilatères. Pour la preuve, il s'agit de montrer que les quatre bissectrices sont en faisceau. Ce n'est évidemment pas une application de Hjelmslev car les angles en  $M$  et  $N$  ne sont pas droits. Nous n'avons pas pris assez de temps pour essayer, à nouveau, de relire les preuves euclidiennes d'un point de vue absolu, en glissant le théorème de Hjelmselv à la place des cocyclicités, dans l'esprit de IV.10.b p 457.

Même si, objectivement, cela n'est, peut-être, qu'un détail dans l'ensemble de ce qui a été accompli, du point de vue de nos représentations vis à vis de la géométrie absolue, ne pas avoir mis au point cette preuve est vécu comme le principal manque<sup>5</sup> d'aboutissement. Et c'est la raison pour laquelle nous voulions terminer ce travail par cette figure, reproduite par conjugaison tant de fois, mais jamais totalement montrée, de manière absolue, dans le style des preuves de Bachmann.

<sup>5</sup> Plus qu'une déformation due à un usage largement intensif de Cabri, il semble y avoir là un trait assez caractéristique de l'auteur : manifestement, une bonne vision géométrique de ce qu'il faut faire, une bonne mise en pratique, avec une sensibilité certaine aux arguments de *réalisations dynamiques*, mais un recul théorique qui fait un peu défaut, en particulier sur les points sensibles. C'est vrai pour la partie mathématique, et, par un homomorphisme aussi improbable que surprenant, c'est aussi le cas pour la partie didactique.